DERIVACIÓN DE FUNCIONES TRASCENDENTES

Obras que integran el bloque 7 (*Cálculo diferencial*):

Módulo I
Introducción al Cálculo diferencial

Módulo 2
Límite de una función

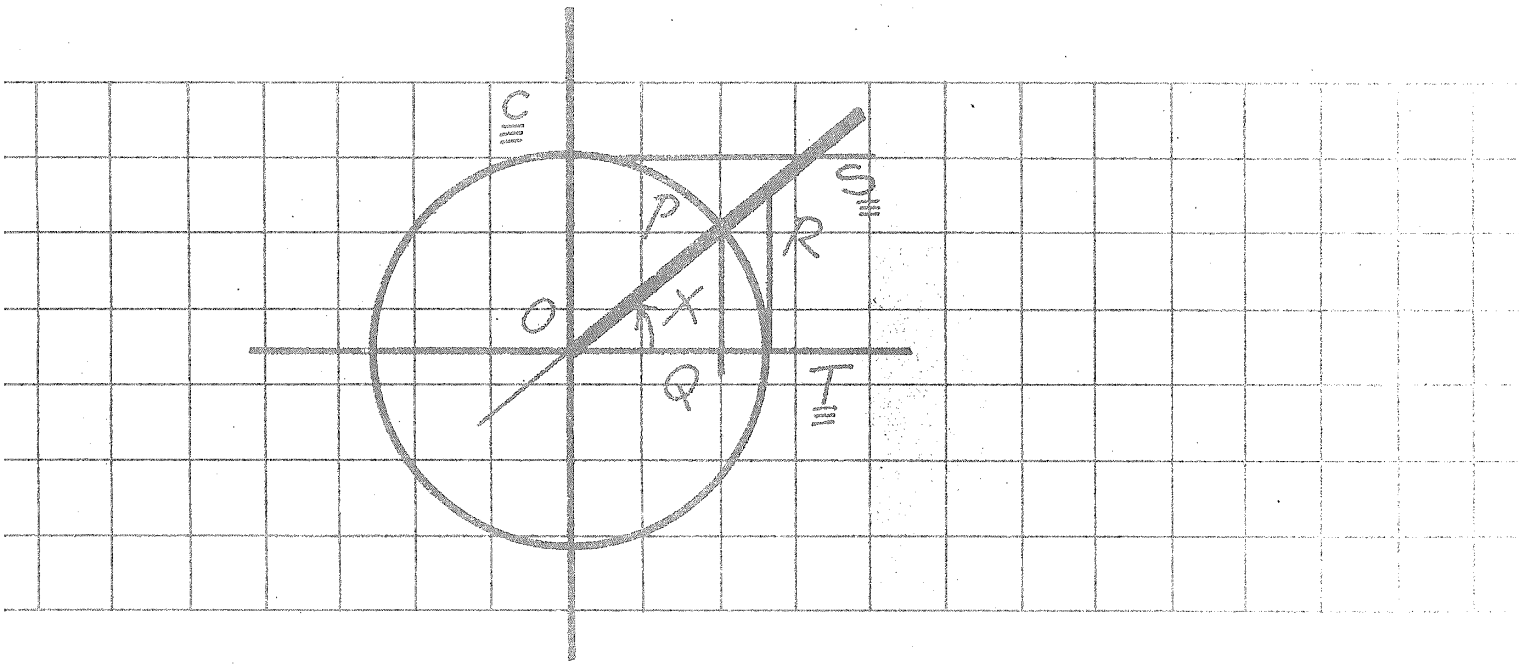
Módulo 3
Continuidad de una función

Módulo 4
Derivación de funciones algebráicas

Módulo 5
Derivación de funciones trascendentes

Módulo 6
Extremos de una función
(máximos y mínimos)

ANUIES
Asociación Nacional
de Universidades e Institutos de
Enseñanza Superior



Módulos de matemáticas

Aprendizaje paso a paso

Bloque 7

Cálculo diferencial

Módulo 5

DERIVACIÓN DE FUNCIONES TRASCENDENTES

Conrado Flores García

EDITORIAL TRILLAS

México, Argentina, Colombia, España,
Puerto Rico, Venezuela

La presentación y disposición en conjunto de
DERIVACIÓN DE FUNCIONES TRASCENDENTES
son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra
puede ser reproducida o trasmitida, mediante ningún sistema
o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado,
la grabación, o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento
de información), sin consentimiento por escrito del editor

Derechos reservados
© 1985, Editorial Trillas, S. A. de C. V.
Av. Río Churubusco 385, Col. Pedro María Anaya,
Deleg. Benito Juárez, 03340, México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Reg. núm. 158

Primera edición, enero 1985
ISBN 968-24-1430-X

Impreso en México

PRESENTACIÓN

Descripción general de la serie

Para la elaboración de los textos que componen la serie MÓDULOS DE MATEMÁTICAS se tomaron en cuenta los objetivos de los programas de estudio de un gran número de instituciones de enseñanza media superior.

La serie consta de 64 módulos didácticos agrupados en 8 bloques, a saber:

1. Álgebra. Estructuras y operaciones.
2. Álgebra. Modelos.
3. Nociones de lógica matemática.
4. Geometría euclidiana.
5. Trigonometría.
6. Geometría analítica.
7. Cálculo diferencial.
8. Cálculo integral.

Cada bloque se complementa con un compendio de la información contenida en los módulos didácticos que lo forman y al cual hemos dado el nombre de MEMO, ya que es una ayuda a la *memo*ria, al entusiasmo y al esfuerzo.

Por otra parte, cada módulo contiene una sucesión de cuadros de aprendizaje, los cuales están organizados en cierto número de submódulos (capítulos); en los que se presenta la información en orden creciente de complejidad. En atención a su fin, hemos designado a los cuadros con los nombres: *informativos, de pregunta* y *de respuesta.* Asimismo, se presentan cuadros complementarios para efectuar, si es necesario, ejercicios o prácticas adicionales.

Sugerencias a los lectores

Los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS están dirigidos a diferentes clases de lectores: los profesores de enseñanza media superior, los estudiantes inscritos en cursos escolarizados de este nivel, estudiantes autodidactas y, en general, personas que deseen actualizar sus conocimientos en este campo.

En lo que respecta a los profesores, éstos pueden usar los módulos como parte integrante de sus guiones de clase; para tal efecto, deben revisar el programa correspondiente y advertir en qué parte puede incorporarse tal o cual módulo, ya que los textos están basados en un gran número de programas y no en uno solo. Al seleccionar los módulos que correspondan al curso planeado, éste quedará dividido en tareas de aprendizaje. El dominio de cada módulo quedará determinado por la consecución de los objetivos específicos.

En relación con los estudiantes inscritos en cursos escolarizados, los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS pueden servirles como material complementario y como una posibilidad de desarrollar los ejercicios que se revisan en el aula.

Los estudiantes autodidactas notarán que cada uno de los textos es un "escalón numerado" que debe seguirse con precisión para poder acceder al siguiente. Los cuadros informativos, los de pregunta y los de respuesta son las partes fundamentales de cada peldaño. En los cuadros informativos se presentan los aspectos que deben ser estudiados con sumo cuidado. Dichos cuadros se destacan con el símbolo , el cual indica que se les debe prestar atención especial. Los cuadros de pregunta brindan el espacio suficiente para anotar la respuesta correspondiente, la cual puede ser verificada en los cuadros de respuesta que están situados justo al lado del cuadro de pregunta (para tal efecto, es conveniente tapar el cuadro de respuesta durante la elaboración de la misma, a fin de poder comprobar el resultado que se obtenga).

El alumno logrará el dominio de cada uno de los módulos mediante la consecución de los objetivos anotados al final de cada submódulo. Dichos objetivos indican lo que el estudiante debe ser capaz de hacer al terminar de examinar cada etapa: sólo si se han cumplido los objetivos deberá pasarse al siguiente módulo.

Respecto a las personas que quieren actualizar sus conocimientos en el campo de las matemáticas, es necesario que estudien los módulos desde el comienzo (a manera de repaso), ya que de esta manera se evitará que algún tema quede poco claro debido a la falta de conocimiento de aquéllos que lo fundamentan. Para ello, se ha incluido una lista de prerrequisitos que deben cumplirse para poder entender determinados temas.

Cabe señalar que la mencionada lista de prerrequisitos, comprende aquellos puntos que son útiles para todos los tipos de lectores, pues se especifican los conocimientos que deben tenerse para poder comprender y asimilar mejor el contenido del módulo en cuestión.

Una última observación: las metas sólo se logran cuando el esfuerzo por alcanzarlas se fundamenta en el agrado, el entusiasmo y la motivación, en el caso de los alumnos, y en la planeación adecuada y la exposición convincente, en lo que respecta a los profesores.

CONRADO FLORES GARCÍA

ÍNDICE DE CONTENIDO

Presentación

Objetivos, esquema estructural y prerrequisitos

5.1 Las funciones trigonométricas —repaso— 9

5.2 Derivadas de las funciones trigonométricas 32

5.3 Derivación trigonométrica 49

5.4 Derivada de una función inversa 53

5.5 Las funciones trigonométricas inversas —repaso— 58

5.6 Derivadas de las funciones trigonométricas inversas 62

5.7 Derivación trigonométrica inversa 74

5.8 Funciones exponencial y logarítmica 84

5.9 Derivadas de las funciones exponenciales y logarítmicas 94

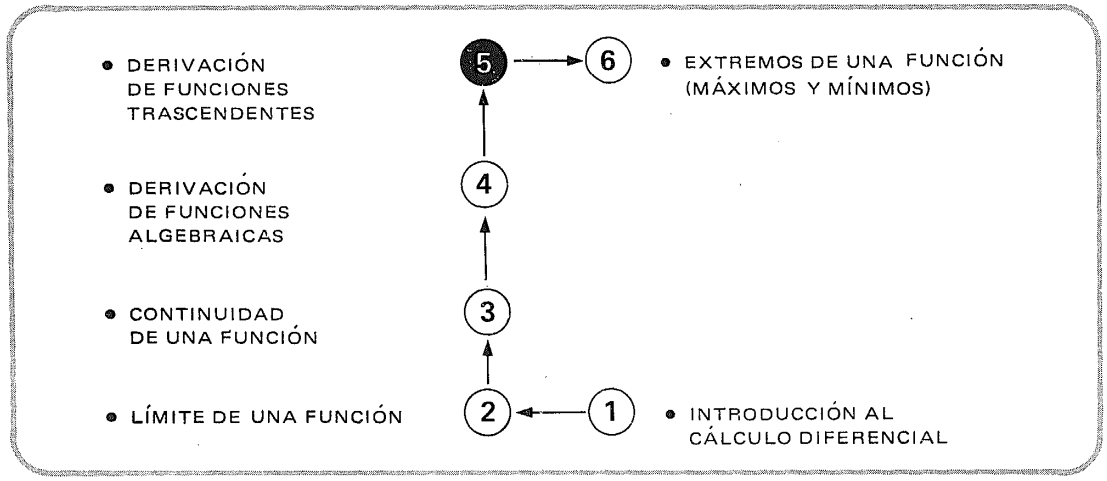
5.10 Derivación exponencial y logarítmica 107

OBJETIVOS, ESQUEMA ESTRUCTURAL Y PRERREQUISITOS

Bloque 7. Cálculo diferencial

Objetivos: derivar funciones algebraicas o trascendentes, y aplicar los conocimientos correspondientes a la resolución de problemas prácticos

Esquema estructural del bloque 7



Módulo 5. Derivación de funciones trascendentes

Objetivos: derivar funciones trascendentes

Prerrequisitos:	Bloque	Módulo(s)
• Nociones de la teoría de conjuntos	1	1
• Manejo de expresiones algebraicas		
– enteras	1	7, 8, 9
– racionales	1	11
– reales	1	13
• Relación y función	2	7, 8
• Funciones logarítmicas o exponenciales	2	9, 10
• Funciones trigonométricas directas o inversas	5	3, 4, 5,
• Identidades y ecuaciones trigonométricas	5	6, 8
• Conceptos básicos de la geometría analítica	6	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
• Límite y continuidad de una función	7	2, 3
• Derivación de funciones algebraicas	7	4

5.1

Las funciones trigonométricas
—repaso—

1

Consideraremos
las siguientes clases de
funciones trascendentes:

- trigonométricas
- trigonométricas inversas
- exponenciales
- logarítmicas

2

Recordemos que
las funciones trigonométricas
son 6, y se llaman:

seno
coseno
tangente
cotangente
secante
cosecante

3

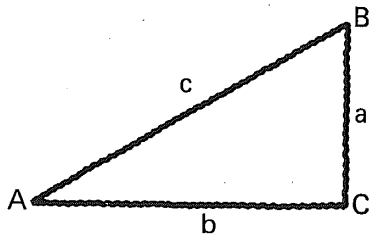
En un triángulo rectángulo, el **seno** de un ángulo agudo se define como la razón de

$$\frac{\text{la medida del cateto opuesto al ángulo}}{\text{la medida de la hipotenusa}}$$

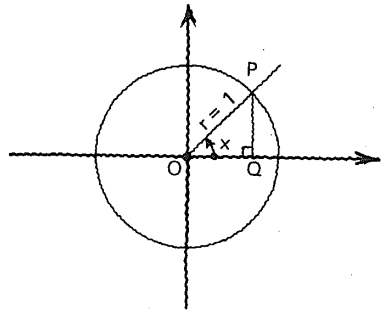
Así:

sen A = $\frac{a}{c}$

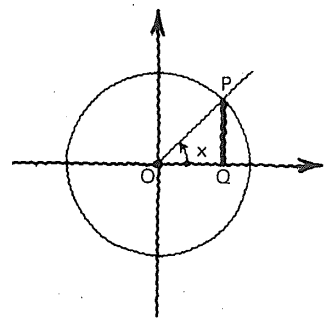
sen B = $\frac{b}{c}$



4

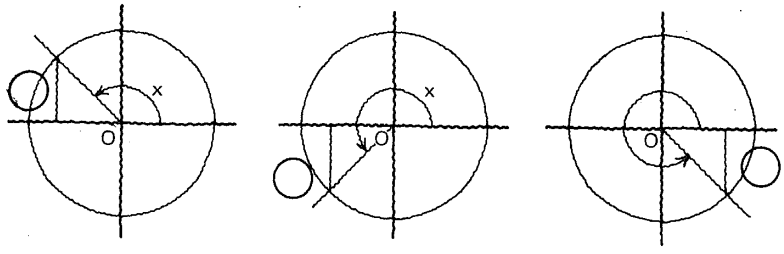


En el círculo unitario mostrado, **sen x** es igual a la medida del segmento rectilíneo $\overline{PQ}$.



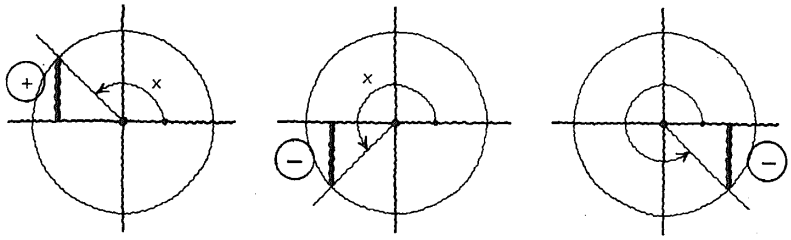
$\overrightarrow{PQ}$

5



En cada caso, destacar el segmento correspondiente a **sen x**, e indicar su signo, de acuerdo con la convención anteriormente adoptada.

Respuesta en el cuadro siguiente



Ver cuadro siguiente.

6

Observamos que:

Si $0 < x < \frac{\pi}{2}$ $\quad 0 < \text{sen } x < 1$

Si $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ $\quad \square < \text{sen } x < \square$

Si $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ $\quad \square < \text{sen } x < \square$

Si $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ $\quad \square < \text{sen } x < \square$

$0 < \text{sen } x < 1$

$-1 < \text{sen } x < 0$

$-1 < \text{sen } x < 0$

7

Si $x = 0$ $\quad f(0) = \text{sen } 0 = \square$

Si $x = \frac{\pi}{2}$ $\quad f(\pi/2) = \text{sen } \frac{\pi}{2} = \square$

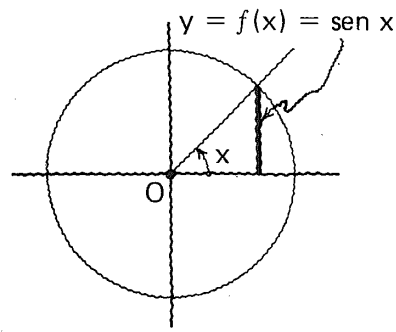
Si $x = \pi$ $\quad f(\pi) = \text{sen } \pi = \square$

Si $x = \frac{3\pi}{2}$ $\quad f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \text{sen } \frac{3\pi}{2} = \square$

Si $x = 2\pi$ $\quad f(2\pi) = \text{sen } 2\pi = \square$

↓

etcétera.



0

1

0

− 1

0

8

Entonces,
tenemos para la **función seno:**

Ecuación definitoria

Dominio

Rango

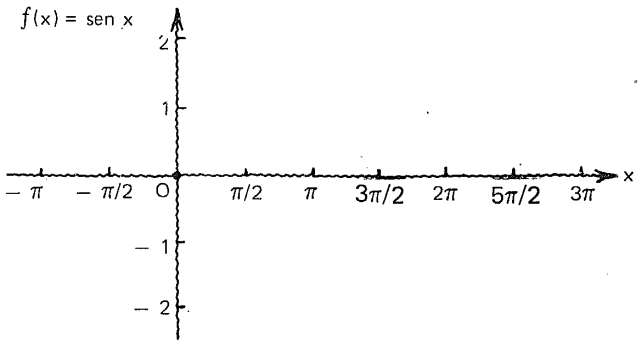
$y = f(x) = \operatorname{sen} x$

$\{x/x \in \mathbb{R}\}$ o $(-\infty, +\infty)$

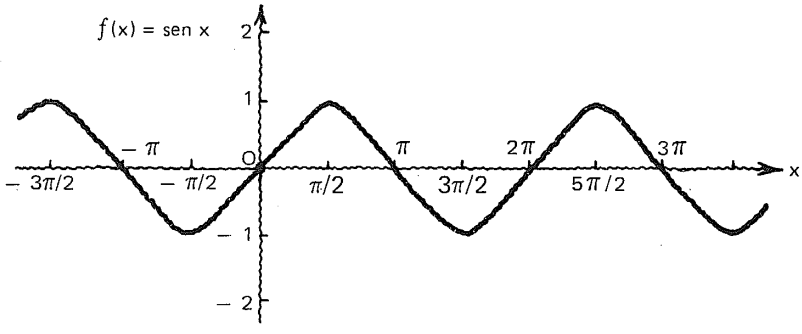
$\{y/y \in \mathbb{R} \wedge -1 \leqslant y \leqslant 1\}$
o $[-1, 1]$

9

Gráfica cartesiana
de la
función seno



Respuesta
en el
cuadro siguiente



En forma intuitiva, podemos
asegurar que la función definida por $f(x) = \operatorname{sen} x$
es/no es continua para todos los valores de $x \in \mathbb{R}$.

es

Aceptaremos este hecho,
sin una demostración
rigurosa.

10

$f(x) = \text{sen } x$

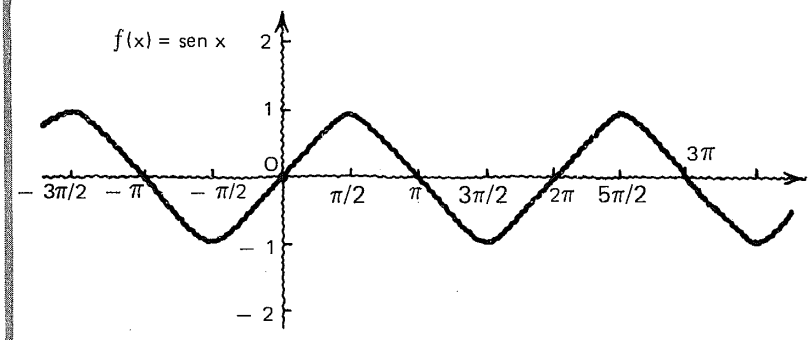
Quiere decir que:

para toda $x = a$

1. sen a existe
2. $\lim_{x \to a} \text{sen } x$ existe
3. [ ]

$\lim_{x \to a} \text{sen } x = \text{sen } a$

11



Podemos observar, también, que la función seno es periódica, con periodo igual a [ ]

Es decir que: sen $(x +$ [ ] $) = \text{sen } x$

2π

$2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

12

En un triángulo rectángulo, al **coseno** de un ángulo agudo lo hemos definido como la razón de

[ ]

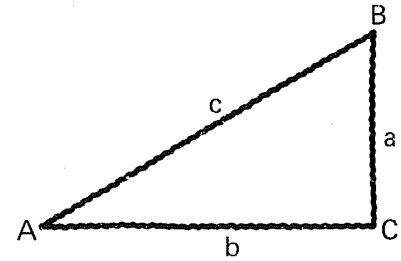
a

[ ]

Así:

$\cos A =$ [ ]

$\cos B =$ [ ]



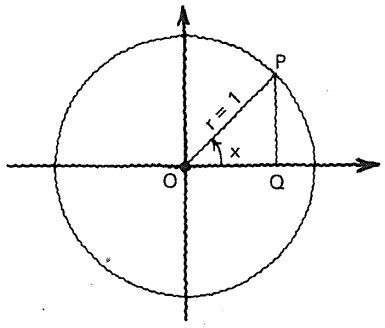
la medida del cateto adyacente al ángulo

la medida de la hipotenusa

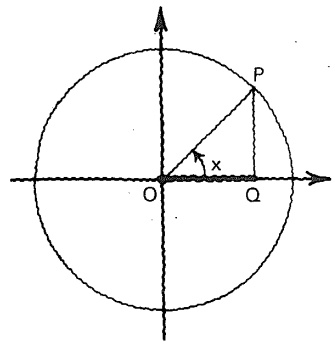
$\frac{b}{c}$

$\frac{a}{c}$

13

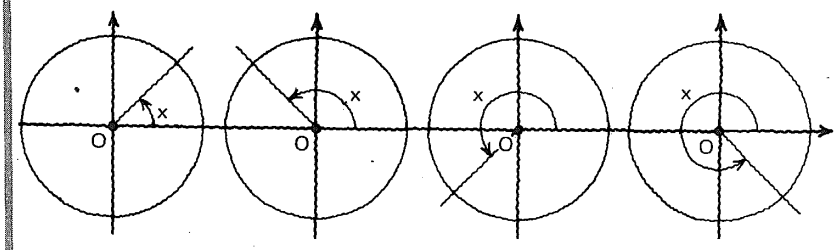


En el círculo unitario
cos x
es igual a la medida
del segmento rectilíneo ⌊____⌋



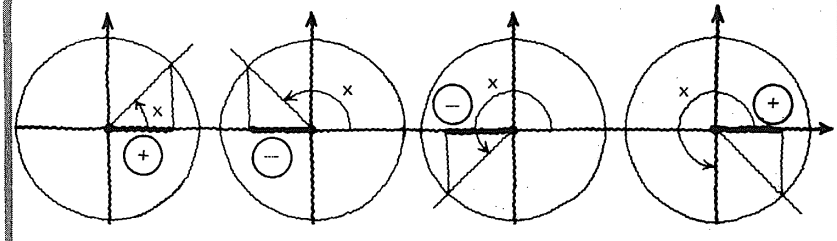
$\overline{OQ}$

14



En cada caso señalar el segmento correspondiente a **cos x**, indicando su signo, de acuerdo con la convención adoptada.

Respuesta
en el
cuadro siguiente



Observamos que:

Si $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ⌊____⌋ Si $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ ⌊____⌋

Si $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ ⌊____⌋ Si $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ ⌊____⌋

Indicar, en cada caso, el rango de variación de **cos x**.

- $0 < \cos x < 1$
- $-1 < \cos x < 0$
- $-1 < \cos x < 0$
- $0 < \cos x < 1$

15

Si $x = 0$ $\quad f(0) = \cos 0 =$ ⌊ ⌋

Si $x = \frac{\pi}{2}$ $\quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos \frac{\pi}{2} =$ ⌊ ⌋

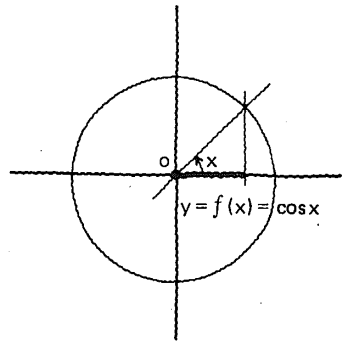
Si $x = \pi$ $\quad f(\pi) = \cos \pi =$ ⌊ ⌋

Si $x = \frac{3\pi}{2}$ $\quad f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos \frac{3\pi}{2} =$ ⌊ ⌋

Si $x = 2\pi$ $\quad f(2\pi) = \cos 2\pi =$ ⌊ ⌋

↓

etcétera.



1

0

− 1

0

1

16

Entonces, tenemos
para la **función coseno:**

Ecuación definitoria ⌊ ⌋

Dominio ⌊ ⌋

Rango ⌊ ⌋

$y = f(x) = \cos x$

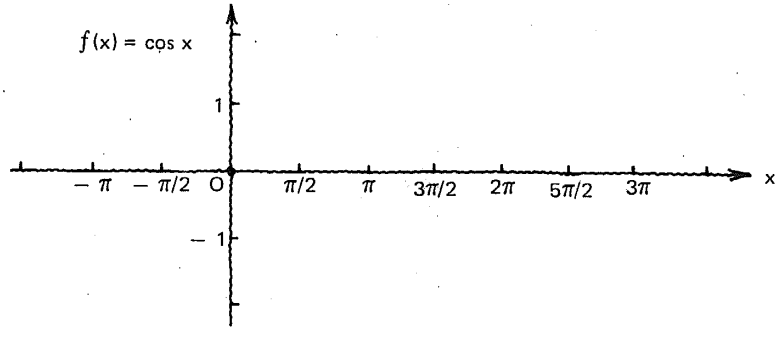
$\{ x/x \in \mathbb{R} \}$ o $(-\infty, +\infty)$

$\{ y/y \in \mathbb{R} \wedge -1 \leqslant y \leqslant 1 \}$

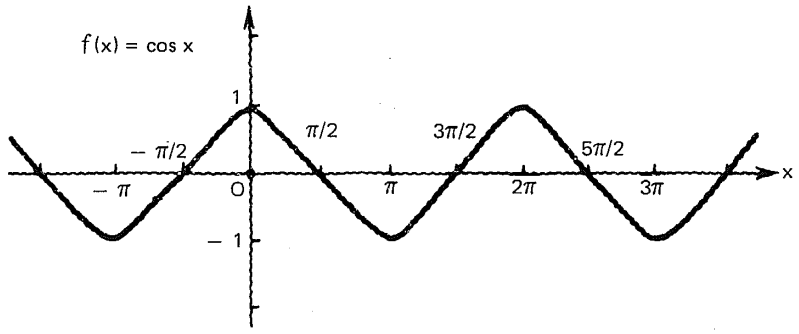
o $[-1, 1]$

17

Gráfica cartesiana
de la función coseno



18



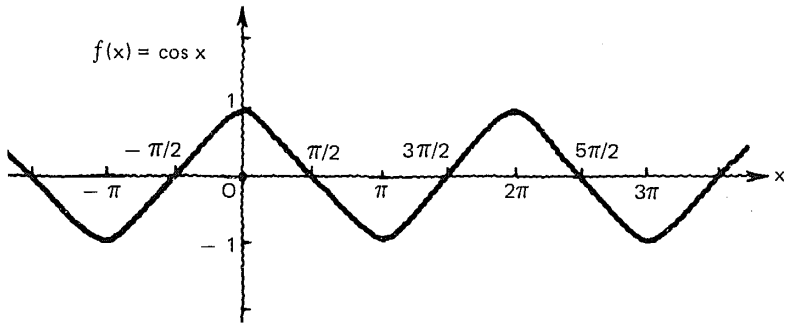
Observación 1: la **función coseno** es **periódica** con periodo igual a [ ].

Es decir que: cos (x + [ ]) = cos x

2π

$2k\pi$ $\quad k \in \mathbb{Z}$

19



Observación 2: la función definida por $f(x) = \cos x$ **es/no es** continua para todos los valores de $x \in \mathbb{R}$.

es

20

$f(x) = \cos x$

Entonces,
se verifica para toda $x = a$

1. [ ]

2. [ ]

3. [ ]

cos a existe

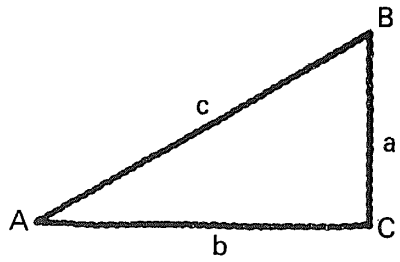
$\lim_{x \to a} \cos x$ existe

$\lim_{x \to a} \cos x = \cos a$

21

En un triángulo rectángulo,
la **tangente** de un ángulo agudo
ha sido definida como

[ ]



De modo que:

tan A = [ ]

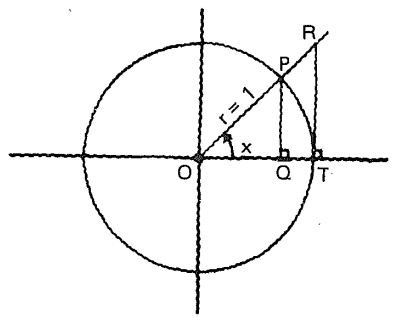
tan B = [ ]

la razón de la medida del
cateto opuesto al ángulo,
a la medida del cateto adyacente

$\frac{a}{b}$

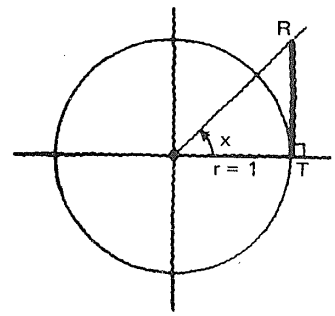
$\frac{b}{a}$

22



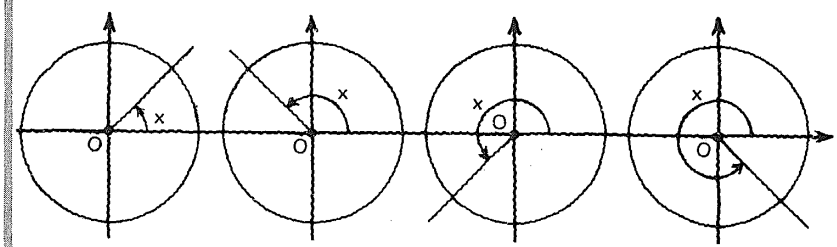
En el círculo unitario
tan x
es la medida del
segmento rectilíneo

[ ]



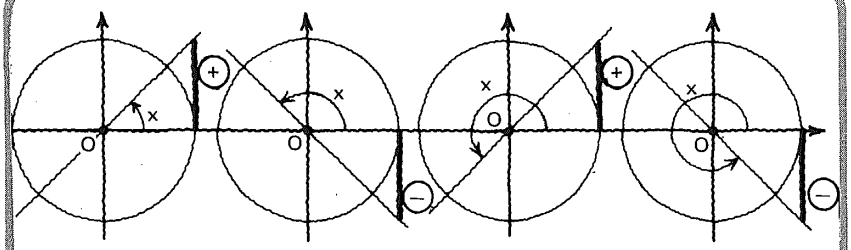
$\overleftrightarrow{TR}$

23



En cada caso señalar el segmento correspondiente
a **tan x**, con su signo.

Respuesta
en el
cuadro siguiente



Podemos observar que:

Si $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ⌊_____⌋ $\tan x > 0$

Si $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ ⌊_____⌋ $\tan x > 0$

Si $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ ⌊_____⌋ $\tan x < 0$

Si $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ ⌊_____⌋ $\tan x < 0$

Indicar en cada caso el rango de variación de **tan x.**

24

Si $x = 0$ $f(0) = \tan 0 =$ ⌊_____⌋ 0

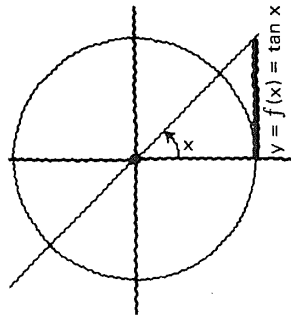
Si $x = \frac{\pi}{2}$ $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \tan \frac{\pi}{2} =$ ⌊_____⌋ número no definido

Si $x = \pi$ $f(\pi) = \tan \pi =$ ⌊_____⌋ 0

Si $x = \frac{3\pi}{2}$ $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \tan \frac{3\pi}{2} =$ ⌊_____⌋ número no definido

Si $x = 2\pi$ $f(2\pi) = \tan 2\pi =$ ⌊_____⌋ 0

etcétera.



25

Para la **función tangente**

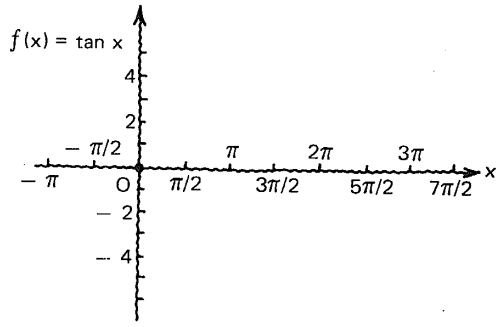
Ecuación definitoria ⌊_____⌋ $y = f(x) = \tan x$

Dominio ⌊_____⌋ $\left\{x/x \in \mathbb{R} \wedge x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}\ k \in \mathbb{Z}$

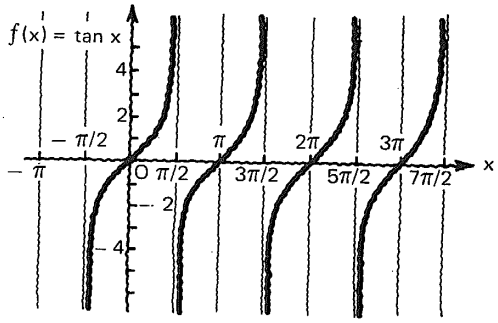
Rango ⌊_____⌋ $\mathbb{R}$

26

Gráfica cartesiana de la **función tangente.**



Respuesta
en el
cuadro siguiente



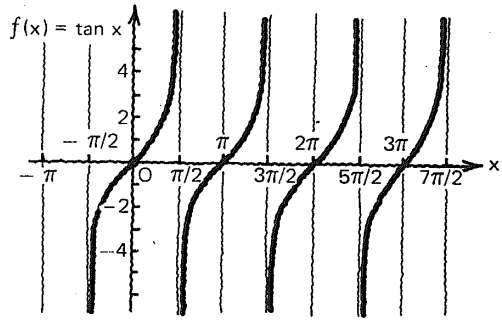
La función **tangente** es **periódica** con periodo igual a ⌊____⌋

Es decir que: tan (x + ⌊____⌋) = tanx.

π

$k\pi$ $\quad k \in \mathbb{Z}$

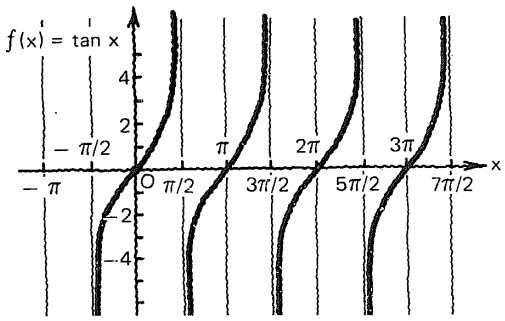
27



La función definida por $f(x) = \tan x$ **es/no es** continua para todos los valores de $x \in \mathbb{R}$.

no es

28

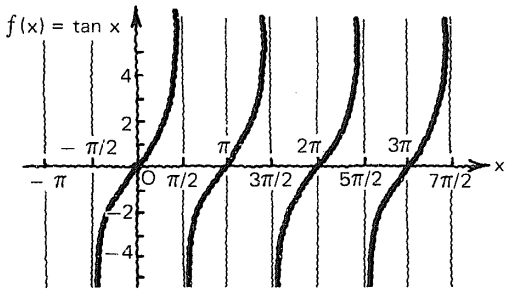


La función tangente
presenta discontinuidades en x = [ ]

$(2k + 1)\frac{\pi}{2}$ $k \in \mathbb{Z}$

29

Intentemos señalar la opción correcta.



La función tangente
es continua para todos los números
de su dominio. V/F

V

30

$f(x) = \tan x$

Se verifica para $x = a$, $a \in \mathbb{R} \wedge a \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ $k \in \mathbb{Z}$

1. [ ]
2. [ ]
3. [ ]

tan a existe

$\lim_{x \to a} \tan x$ existe

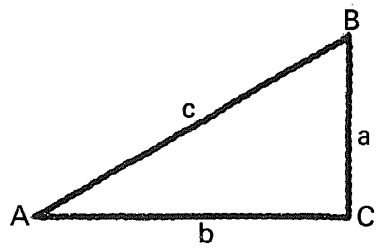
$\lim_{x \to a} \tan x = \tan a$

31

Recordemos la definición de *cotangente* de un ángulo agudo, y escribamos, para el triángulo rectángulo mostrado:

cot A = [____]

cot B = [____]

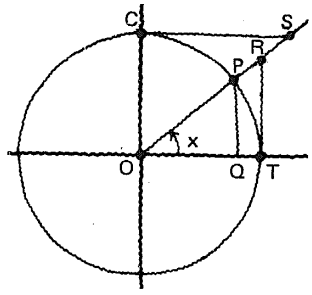


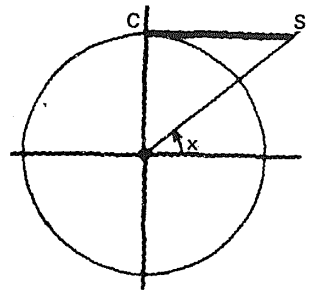
$\frac{b}{a}$

$\frac{a}{b}$

32

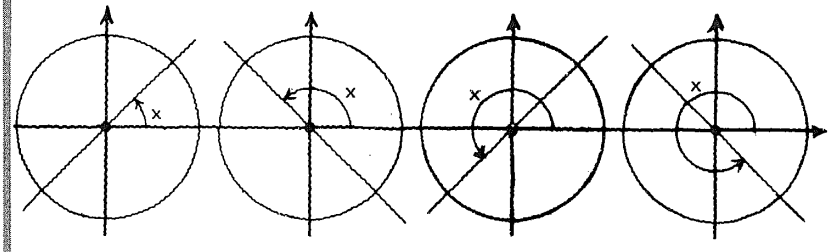
En el círculo unitario, **cot x** es la medida del segmento rectilíneo [____].





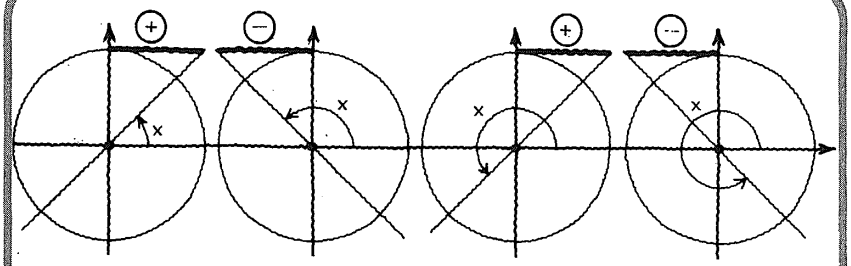
$\overrightarrow{CS}$

33



En cada caso señalar el segmento correspondiente a **cot x**, con su signo.

Respuesta en el cuadro siguiente



Si $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ⌊_____⌋ Si $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ ⌊_____⌋

Si $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ ⌊_____⌋ Si $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ ⌊_____⌋

Indicar en cada caso el rango de variación de **cot x.**

$\cot x > 0$ $\cot x > 0$

$\cot x < 0$ $\cot x < 0$

34

Si x = 0 $f(0) = \cot 0 =$ ⌊_____⌋

Si $x = \frac{\pi}{2}$ $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cot \frac{\pi}{2} =$ ⌊_____⌋

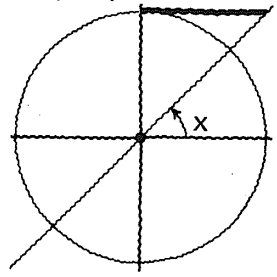
Si $x = \pi$ $f(\pi) = \cot \pi =$ ⌊_____⌋

Si $x = \frac{3\pi}{2}$ $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cot \frac{3\pi}{2} =$ ⌊_____⌋

Si $x = 2\pi$ $f(2\pi) = \cot 2\pi =$ ⌊_____⌋

etcétera.

$y = f(x) = \cot x$



número no definido

0

número no definido

0

número no definido

35

Para la **función cotangente:**

Ecuación definitoria ⌊_____⌋

Dominio ⌊_____⌋

Rango ⌊_____⌋

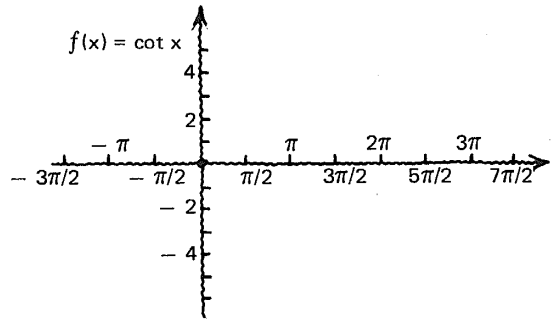
$y = f(x) = \cot x$

$\{x/x \in \mathbb{R} \wedge x \neq k\pi\ \}\ k \in \mathbb{Z}$

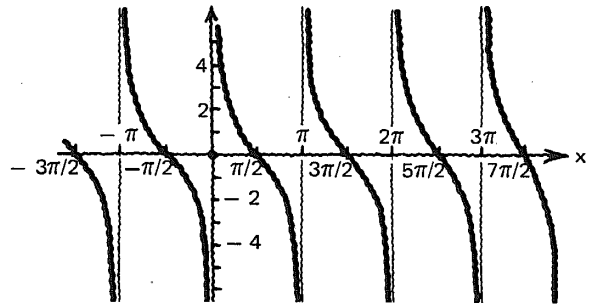
$\mathbb{R}$

36

Gráfica cartesiana de la **función cotangente**.



Respuesta
en el
cuadro siguiente



La función cotangente es **periódica** un periodo igual a $\underline{\qquad}$.

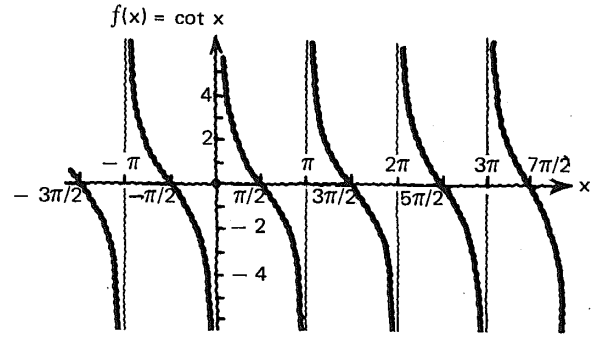
O sea que:

$$\cot(x + \underline{\qquad}) = \cot x.$$

π

$k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$

37



La función definida por $y = \cot x$
es continua para todos los valores de $x \in \mathbb{R}$,
con excepción de

$$x = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

$k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$

38

$f(x) = \cot x$

Se verifica para $x = a$, en que a es un número real cualquiera, con excepción de [ ]

1. [ ]

2. [ ]

3. [ ]

cualquier múltiplo de π (o sea $k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$)

cot a existe

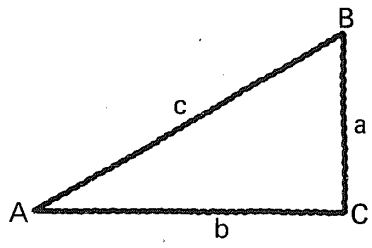
$\lim_{x \to a} \cot x$ existe

$\lim_{x \to a} \cot x = \cot a$

39

En un triángulo rectángulo, la **secante** de un ángulo agudo es:

[ ]



Por lo tanto:

sec A = [ ]

sec B = [ ]

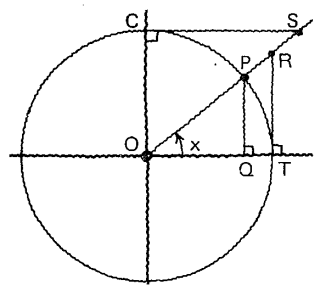
la razón de la medida de la hipotenusa a la medida del cateto adyacente al ángulo.

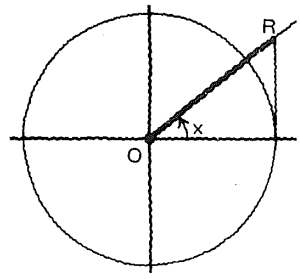
$\frac{c}{b}$

$\frac{c}{a}$

40

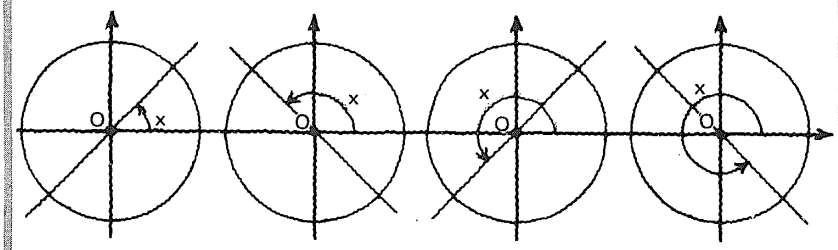
En el círculo unitario, **sec x** es la medida del segmento rectilíneo [ ].





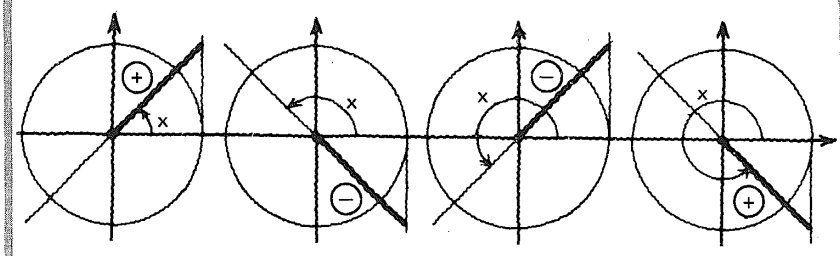
$\overrightarrow{OR}$

41



En cada caso, señalar el segmento correspondiente a **sec x**, con su signo.

Respuesta en el cuadro siguiente



Si $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ⌊_____⌋ Si $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ ⌊_____⌋

Si $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ ⌊_____⌋ Si $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ ⌊_____⌋

Indicar en cada caso el rango de variación de **sec x**.

$\sec x > 1$ $\sec x < -1$

$\sec x < -1$ $\sec x > 1$

42

Si $x = 0$ $f(0) = \sec 0 =$ ⌊_____⌋

Si $x = \frac{\pi}{2}$ $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sec \frac{\pi}{2} =$ ⌊_____⌋

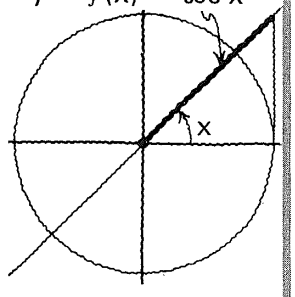
Si $x = \pi$ $f(\pi) = \sec \pi =$ ⌊_____⌋

Si $x = \frac{3\pi}{2}$ $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sec \frac{3\pi}{2} =$ ⌊_____⌋

Si $x = 2\pi$ $f(2\pi) = \sec 2\pi =$ ⌊_____⌋

etcétera.

$y = f(x) = \sec x$



1

no definida

− 1

no definida

1

43

Para la **función secante:**

Ecuación definitoria ⌊_____⌋

Dominio ⌊_____⌋

Rango ⌊_____⌋

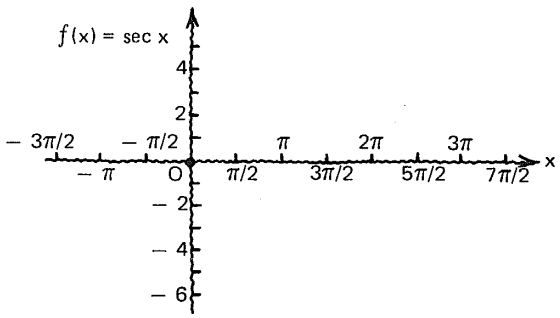
$y = f(x) = \sec x$

$\left\{ x/x \in \mathbb{R} \wedge x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \right\} \; k \in \mathbb{Z}$

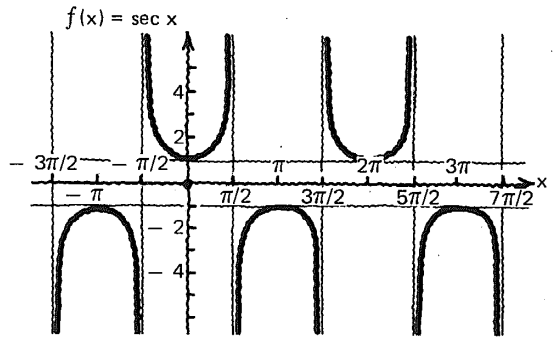
$\{y/y \in \mathbb{R} \wedge (x \leqslant -1 \vee x \geqslant 1\}$

44

Gráfica cartesiana de la **función secante.**



Respuesta
en el
cuadro siguiente



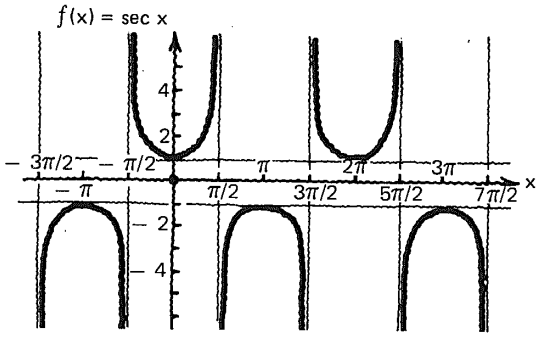
La función secante es **periódica.** El periodo es igual a ⌊_____⌋

Es decir: sec (x + ⌊_____⌋) = sec x.

2π

$2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$

45



La función definida por $y = \sec x$ es continua para

[ ]

todos los valores de x con excepción de los múltiplos impares de $\pi/2$, es decir:

$x \in \mathbb{R} \wedge x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}\ k \in \mathbb{Z}$

46

$f(x) = \sec x$

Para cualquier número real a, con excepción de los múltiplos impares de $\pi/2$,

se verifica

1. [ ]
2. [ ]
3. [ ]

sec a existe

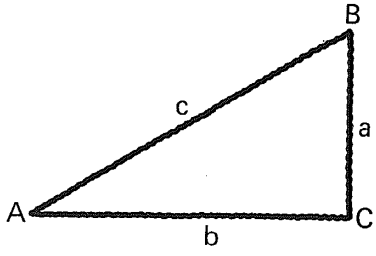
$\lim_{x \to a} \sec x$ existe

$\lim_{x \to a} \sec x = \sec a$

47

En un triángulo rectángulo, la **cosecante** de un ángulo agudo puede definirse como

[ ]



Así que:

cosec A = [ ]

cosec B = [ ]

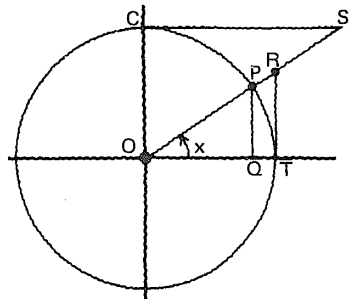
la razón de la medida de la hipotenusa a la medida del cateto opuesto al ángulo

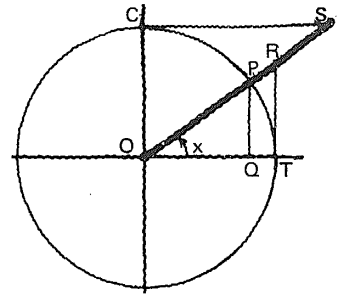
$\frac{c}{a}$

$\frac{c}{b}$

48

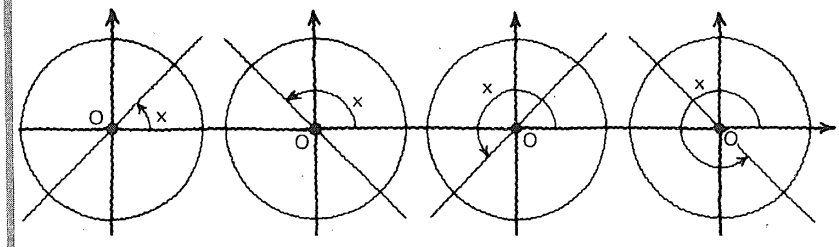
En el círculo unitario,
cosec x es
la medida del segmento
rectilíneo ⌊____⌋.





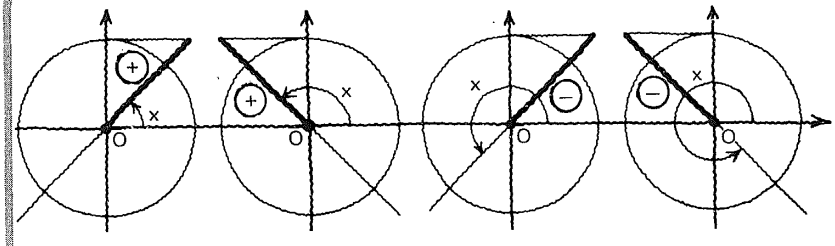
$\overline{OS}$

49



En cada figura, señalar el segmento correspondiente
a **cosec x**, con su signo.

Respuesta
en el
cuadro siguiente



Si $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ⌊_____⌋ Si $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ ⌊_____⌋

Si $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ ⌊_____⌋ Si $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ ⌊_____⌋

Indicar en cada caso el rango de variación de **cosec x**.

$\text{cosec}\, x > 1 \quad \text{cosec}\, x < -1$

$\text{cosec}\, x > 1 \quad \text{cosec}\, x < -1$

50

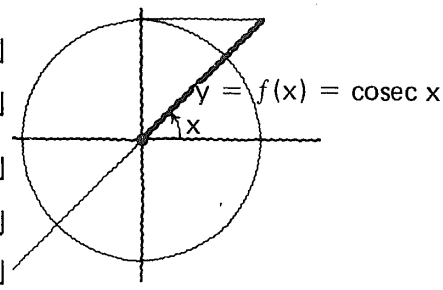
Si $x = 0$ $\quad f(0) = \operatorname{cosec} 0 =$ ⌊___⌋

Si $x = \frac{\pi}{2}$ $\quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{cosec} \frac{\pi}{2} =$ ⌊___⌋

Si $x = \pi$ $\quad f(\pi) = \operatorname{cosec} \pi =$ ⌊___⌋

Si $x = \frac{3\pi}{2}$ $\quad f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \operatorname{cosec} \frac{3\pi}{2} =$ ⌊___⌋

Si $x = 2\pi$ $\quad f(2\pi) = \operatorname{cosec} 2\pi =$ ⌊___⌋



no definida

1

no definida

– 1

no definida

51

Para la **función cosecante**

Ecuación definitoria ⌊_____⌋

Dominio ⌊_____⌋

Rango ⌊_____⌋

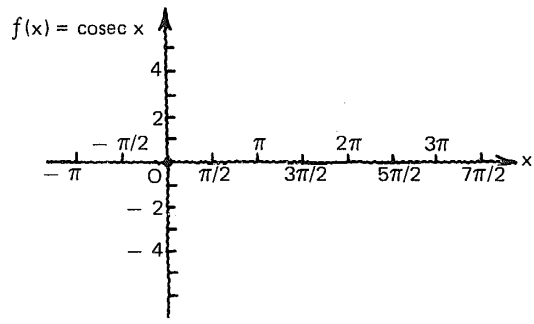
$y = f(x) = \operatorname{cosec} x$

$\{x/x \in \mathbb{R} \wedge x \neq k\pi\}\ k \in \mathbb{Z}$

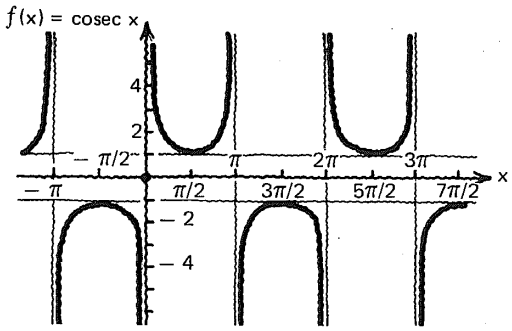
$\{y/y \in \mathbb{R} \wedge (y \leqslant -1 \vee y \geqslant 1\}$

52

Gráfica cartesiana de la **función cosecante.**



Respuesta
en el
cuadro siguiente



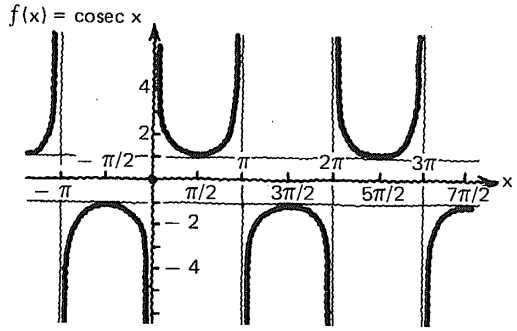
La función cosecante es **periódica** con periodo igual a ____

cosec (x + ____) = cosec x.

2π

$2k\pi$ $\quad k \in \mathbb{Z}$

53



La función definida por y = cosec x
es continua en

____

cualquier valor de x, con excepción de los múltiplos de π.

$x \in \mathbb{R} \wedge x \neq k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$

54

Para cualquier número real (a)
con excepción de

____

se verifica
1. ____
2. ____
3. ____

los múltiplos de π

cosec a existe

$\lim_{x \to a} \text{cosec } x$ existe

$\lim_{x \to a} \text{cosec } x = \text{cosec } a$

55

Resumen.

Las funciones trigonométricas
$y = f_t(x)$

Función	*Dominio*	*Rango*	*Regla*	*Periodo*
seno	$\mathbb{R}$ (todos los reales)	$[-1, 1]$	$f(x) = \operatorname{sen} x$	2π
coseno	$\mathbb{R}$ (todos los reales)	$[-1, 1]$	$f(x) = \cos x$	2π
tangente	$\mathbb{R} \wedge x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$; $k \in \mathbb{Z}$	$\mathbb{R}$ (todos los reales)	$f(x) = \tan x$	π
cotangente	$\mathbb{R} \wedge x \neq k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$	$\mathbb{R}$ (todos los reales)	$f(x) = \cot x$	π
secante	$\mathbb{R} \wedge x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$; $k \in \mathbb{Z}$	$\mathbb{R} - (-1, 1)$	$f(x) = \sec x$	2π
cosecante	$\mathbb{R} \wedge x \neq k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$	$\mathbb{R} - (-1, 1)$	$f(x) = \operatorname{cosec} x$	2π

Cada función es continua en todos los números de su dominio.

7.5.1

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *recordar* para cada una de las funciones trigonométricas; cuál es su dominio, su rango y su periodo;
- *explicar* por qué cada una de las funciones trigonométricas es continua para todos los números de su dominio.

5.2

Derivadas de las funciones trigonométricas

56

Para el estudio de los cuadros siguientes, el alumno deberá tener a la mano, un resumen de las **identidades trigonométricas** estudiadas en el bloque de **trigonometría.**

57

1. Derivada de la función seno.

Sea $f(x) = \text{sen}\,x$

1. $f(x + \Delta x) =$ [ ]
2. $f(x + \Delta x) - f(x) =$ [ ]
3. $\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$ [ ]

$\text{sen}\,(x + \Delta x)$

$\text{sen}\,(x + \Delta x) - \text{sen}\,x$

$$\frac{\text{sen}\,(x + \Delta x) - \text{sen}\,x}{\Delta x}$$

58

3. $\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \dfrac{\operatorname{sen}(x + \Delta x) - \operatorname{sen} x}{\Delta x}$

Podemos transformar la expresión del segundo miembro, teniendo en cuenta que:

sen $(\alpha + \beta)$ = [_____]

De acuerdo con la identidad 9, estudiada en trigonometría:

sen $\alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$

59

Entonces

3. $\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \dfrac{\operatorname{sen}(x + \Delta x) - \operatorname{sen} x}{\Delta x}$

Expresión transformada. [_____]

$\dfrac{\operatorname{sen} x \cos \Delta x + \cos x \operatorname{sen} \Delta x - \operatorname{sen} x}{\Delta x}$

60

3. $\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \dfrac{\operatorname{sen}(x + \Delta x) - \operatorname{sen} x}{\Delta x}$

$= \dfrac{\operatorname{sen} x \cos \Delta x + \cos x \operatorname{sen} \Delta x - \operatorname{sen} x}{\Delta x}$

Factorizando:

$= \dfrac{\operatorname{sen} x(\cos \Delta x - 1) + \cos x \operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x}$

Expresión equivalente:

$= \operatorname{sen} x \dfrac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} + \cos x \dfrac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x}$

61

3. $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \operatorname{sen} x \cdot \dfrac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} + \cos x \cdot \dfrac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x}$

4. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} =$ [_____] TL5

Y de acuerdo con los teoremas de límites estudiados en el módulo 7.2.

[_____] TL6

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \operatorname{sen} x \cdot \dfrac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x}$

$+ \lim\limits_{\Delta x \to 0} \cos x \cdot \dfrac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x}$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \operatorname{sen} x \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x}$

$+ \lim\limits_{\Delta x \to 0} \cos x \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x}$

62

Hemos obtenido:

4. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \operatorname{sen} x \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x}$

$+ \lim\limits_{\Delta x \to 0} \cos x \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x}$

Nuestro problema consiste ahora en determinar los 4 límites del segundo miembro.

63

Intentemos dar:

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \operatorname{sen} x =$ [_____]

$\operatorname{sen} x$

TL1, dado que:
$\operatorname{sen} x$ no depende de Δx

64

$\lim_{\Delta x \to 0} \cos x = \boxed{\quad\quad}$

$\cos x$

65

Los límites:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x} \quad \text{y} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x}$$

requieren atención especial.

66

Intentaremos evaluar, en primer lugar:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

Hagamos tender x* a cero, por la izquierda y por la derecha, y observemos el comportamiento de la función sen x/x.

$x \to 0^-$

$x \to$	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	-0.00001
$\frac{\operatorname{sen} x}{x} \to$					

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} \to \boxed{\quad\quad}$$

* x se supone dado en radianes.

Respuesta en el cuadro siguiente

$x \to$	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	-0.00001
$\frac{\operatorname{sen} x}{x} \to$	0.99833146	0.99998334	0.99999984	≈ 1	≈ 1

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} \to 1$$

67

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

$x \to 0^+$

0.0001	0.001	0.01	0.1	$\leftarrow x$
				$\leftarrow \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} \to \square$$

Respuesta en el cuadro siguiente

0.0001	0.001	0.01	0.1	$\leftarrow x$
≈ 1	0.99999984	0.99998334	0.99833146	$\leftarrow \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} \to 1$$

68

Parece razonable aceptar que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Trazaremos la gráfica cartesiana de $\phi(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

Debemos observar que la curva es simétrica con respecto al eje de las ordenadas, puesto que:

$$\frac{\operatorname{sen}(-x)}{-x} = \frac{-\operatorname{sen} x}{-x} = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

69

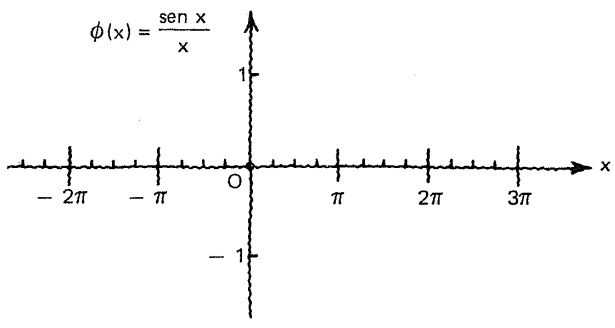
Completemos la tabla:

x	sen x/x
0	
$\pi/4$	
$\pi/2$	
$3\pi/4$	
π	
$5\pi/4$	
$3\pi/2$	
$7\pi/4$	
2π	
$9\pi/4$	
$5\pi/2$	
$11\pi/4$	
3π	

x	sen x/x
0	no definido
$\pi/4$	0.9003
$\pi/2$	0.6366
$3\pi/4$	0.3001
π	0,0000
$5\pi/4$	−0.1801
$3\pi/2$	−0,2122
$7\pi/4$	−0.1291
2π	0,0000
$9\pi/4$	0.1000
$5\pi/2$	0.1273
$11\pi/4$	0.0818
3π	0,0000

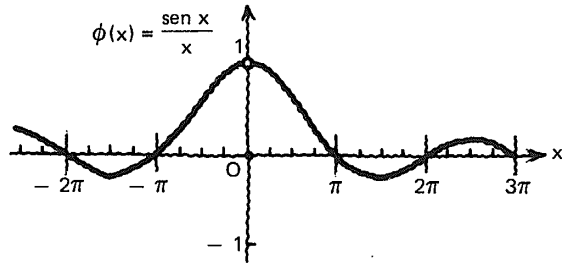
70

Gráfica cartesiana de $\phi(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$



Respuesta en el cuadro siguiente

Señalar la opción correcta.



Podemos observar que la función definida por $\phi(x) = \frac{\text{sen}\,x}{x}$

- es continua
- presenta una discontinuidad
  - evitable
  - esencial

} en $x = 0$

presenta una discontinuidad evitable

71

Señalar la opción correcta.

Para $x = 0$

$$\phi(x) = \frac{\text{sen}\,x}{x}$$

1. $\frac{\text{sen}\,0}{0}$ **existe/no existe**

no existe

2. $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\,x}{x}$ **existe/no existe**

existe

si existe, $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\,x}{x} =$ [_____]

1

72

Puede demostrarse, por procedimientos geométricos y trigonométricos, que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\,x}{x} = 1$$

Nos bastará, por el momento, la evidencia señalada.

73

Consideremos, ahora:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x}$$

Ver cuadro siguiente.

74

$\frac{\cos x - 1}{x} \to$ ⌊____⌋

$x \to 0^-$

$x \to$	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001
$\frac{\cos x-1}{x} \to$				

$\frac{\cos x-1}{x} \to$ ⌊____⌋

$x \to 0^+$

0.0001	0.001	0.01	0.1	$\leftarrow x$
				$\leftarrow \frac{\cos x - 1}{x}$

Respuesta en el cuadro siguiente

$x \to 0^-$ $\quad \frac{\cos x-1}{x} \to 0$

$x \to$	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001
$\frac{\cos x-1}{x} \to$	0.0000152	0.000001	≈ 0	≈ 0

$x \to 0^+$ $\quad \frac{\cos x-1}{x} \to 0$

0.0001	0.001	0.01	0.1	$\leftarrow x$
≈ 0	≈ 0	-0.000001	-0.0000152	$\leftarrow \frac{\cos x-1}{x}$

75

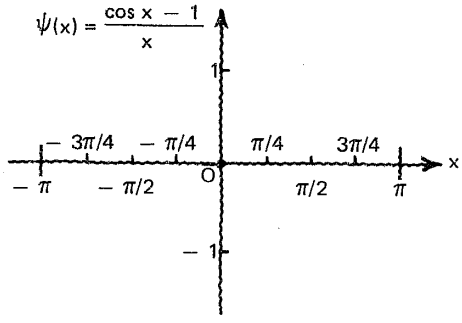
Completemos la siguiente tabla.

x	$(\cos x - 1)/x$
$-3\pi/2$	
$-5\pi/4$	
$-\pi$	
$-3\pi/4$	
$-\pi/2$	
$-\pi/4$	
0	
$\pi/4$	
$\pi/2$	
$3\pi/4$	
π	
$5\pi/4$	
$3\pi/2$	

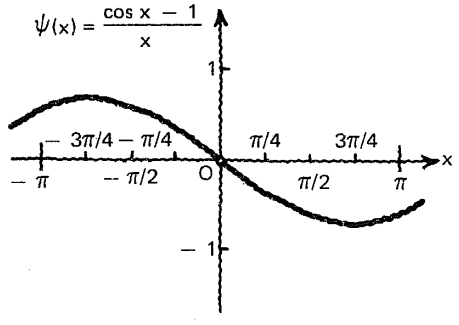
x	$(\cos x - 1)/x$
$-3\pi/2$	0.2122
$-5\pi/4$	0.4347
$-\pi$	0.6366
$-3\pi/4$	0.7245
$-\pi/2$	0.6366
$-\pi/4$	0.3729
0	no def.
$\pi/4$	−0.3729
$\pi/2$	−0.6366
$3\pi/4$	−0.7245
π	−0.6366
$5\pi/4$	−0.4347
$3\pi/2$	−0.2122

76

Gráfica cartesiana de $\psi(x) = \dfrac{\cos x - 1}{x}$



77



Observamos que:

$\psi(0)$ no está definida, sin embargo, $\lim_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x}$ existe y es igual a [____].

0

78

Regresando a nuestro problema de encontrar una expresión para la derivada de la función seno, definida por:

$$f(x) = \operatorname{sen} x$$

Habíamos obtenido:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{sen} x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \cos x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x}$$

79

Ahora sabemos que:

$\lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{sen} x =$ [ ]

$\lim_{\Delta x \to 0} \cos x =$ [ ]

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} =$ [ ]

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x} =$ [ ]

$\operatorname{sen} x$ $\cos x$

0 1

80

Por lo tanto:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \text{[ ]}$$

$\cos x$

Es decir que:

$$\frac{d(\operatorname{sen} x)}{dx} = \text{[ ]}$$

$\cos x$

81

$$\frac{d(\operatorname{sen} x)}{dx} = \cos x$$

Ahora bien,

si $f(u) = \operatorname{sen} u$
y $u = g(x)$
podemos escribir,
de acuerdo con la regla de la cadena:

$$\frac{d(\operatorname{sen} u)}{dx} = \boxed{\qquad\qquad}$$

$$\frac{d(\operatorname{sen} u)}{du} \cdot \frac{d(u)}{dx} = \cos u \cdot \frac{d(u)}{dx}$$

82

2. Derivada de la función coseno.

Sea $f(x) = \cos x$

Sabemos que $\cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ { Funciones de ángulos complementarios

Entonces:

$$\frac{d(\cos x)}{dx} = \boxed{\qquad\qquad}$$

$$\frac{d\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]}{dx} \cdot \frac{d\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{dx}$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot (-1) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

83

$$\frac{d(\cos x)}{dx} = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Por "complementaridad":

$$\boxed{\qquad\qquad}$$

$-\operatorname{sen} x$

84

$$\frac{d(\cos x)}{dx} = -\operatorname{sen} x$$

Y de acuerdo con la regla de la cadena:

$$\frac{d(\cos u)}{dx} = \text{[\_\_\_\_\_]}$$

$$-\operatorname{sen} u \cdot \frac{d(u)}{dx}$$

85

3. Derivada de la función tangente.

Sea $f(x) = \tan x$

Expresando $\tan x$ en términos de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$:

$$f(x) = \tan x = \text{[\_\_\_\_\_]}$$

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

86

$$f(x) = \tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

Derivando como un cociente de funciones:

$$f'(x) = \frac{d(\tan x)}{dx} = \text{[\_\_\_\_\_]}$$

$$\frac{\cos x \cdot \frac{d(\operatorname{sen} x)}{dx} - \operatorname{sen} x \cdot \frac{d(\cos x)}{dx}}{\cos^2 x}$$

$$\frac{\cos x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot (-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}$$

$$\frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

Puesto que $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$ y

$$\frac{1}{\cos x} = \sec x$$

Expresión simplificada: [_____]

$\sec^2 x$

87

$$\frac{d(\tan x)}{dx} = \sec^2 x$$

Y de acuerdo con la regla de la cadena:

$$\frac{d(\tan u)}{dx} = \text{[\_\_\_\_\_]}$$

$$\sec^2 u \cdot \frac{d(u)}{dx}$$

88

4. Derivada de la función cotangente.

Sea $f(x) = \cot x =$ [_____]

Expresando en términos de **sen x** y **cos x.**

$$\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

89

$$f(x) = \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

$$f'(x) = \frac{d(\cot x)}{dx} = \text{[\_\_\_\_\_]}$$

Expresión simplificada: [_____]

$$\frac{\operatorname{sen} x \cdot \frac{d(\cos x)}{dx} - \cos x \cdot \frac{d(\operatorname{sen} x)}{dx}}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$\frac{\operatorname{sen} x \cdot (-\operatorname{sen} x) - \cos x \cdot \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$\frac{-\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$-\frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$-\operatorname{cosec}^2 x$$

90

$$\frac{d(\cot x)}{dx} = -\operatorname{cosec}^2 x$$

Y

$$\frac{d(\cot u)}{dx} = \text{[ ]}$$

$$-\operatorname{cosec}^2 u \cdot \frac{d(u)}{dx}$$

91

5. Derivada de la función secante.

Sea $f(x) = \sec x =$ [ ]

Expresando en términos de **cos x**

$$\frac{1}{\cos x}$$

92

$$f(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$f'(x) = \frac{d(\sec x)}{dx} = \text{[ ]}$$

$$\frac{\cos x \cdot \frac{d(1)}{dx} - 1 \cdot \frac{d(\cos x)}{dx}}{\cos^2 x}$$

$$\frac{0 - (-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}$$

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$$

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x}$$

Expresión simplificada: [ ]

tan x · sec x

93

$$\frac{d(\sec x)}{dx} = \tan x \sec x$$

Y

$$\frac{d(\sec u)}{dx} = \boxed{\qquad\qquad}$$

$$\tan u \cdot \sec u \cdot \frac{d(u)}{dx}$$

94

6. Derivada de la función cosecante.

Sea $f(x) = \operatorname{cosec} x = \boxed{\qquad}$

$$\frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

95

$$f(x) = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

Derivando:

Expresión simplificada $\boxed{\qquad}$

Respuesta en el cuadro siguiente

$$f'(x) = \frac{d(\operatorname{cosec} x)}{dx}$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x \cdot \dfrac{d(1)}{dx} - 1 \cdot \dfrac{d(\operatorname{sen} x)}{dx}}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$= \frac{0 - \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$= -\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$= -\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} x} = -\cot x \cdot \operatorname{cosec} x$$

96

$$\frac{d(\operatorname{cosec} x)}{dx} = -\cot x \operatorname{cosec} x$$

y

$$\frac{d(\operatorname{cosec} u)}{dx} = \underline{\qquad\qquad}$$

$$-\cot u \cdot \operatorname{cosec} u \cdot \frac{d(u)}{dx}$$

97

Resumen 1. Derivadas de funciones trigonométricas directas.

1. $\dfrac{d(\operatorname{sen} u)}{dx} = \cos u \cdot \dfrac{d(u)}{dx}$
2. $\dfrac{d(\cos u)}{dx} = -\operatorname{sen} u \cdot \dfrac{d(u)}{dx}$
3. $\dfrac{d(\tan u)}{dx} = \sec^2 u \cdot \dfrac{d(u)}{dx}$
4. $\dfrac{d(\cot u)}{dx} = -\operatorname{cosec}^2 u \cdot \dfrac{d(u)}{dx}$
5. $\dfrac{d(\sec u)}{dx} = \tan u \cdot \sec u \cdot \dfrac{d(u)}{dx}$
6. $\dfrac{d(\operatorname{cosec} u)}{dx} = -\cot u \cdot \operatorname{cosec} u \cdot \dfrac{d(u)}{dx}$

7.5.2

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *obtener* una expresión para la derivada de la función seno, y a partir de ella obtener las derivadas de las 5 funciones trigonométricas restantes.

5.3

Derivación trigonométrica

98

$f(\theta) = \tan\theta$ $\quad f'(\theta) =$ ⌊_____⌋

$f(t) = \operatorname{sen} t$ $\quad f'(t) =$ ⌊_____⌋

$y = \cos x$ $\quad y' =$ ⌊_____⌋

$r = \cot\theta$ $\quad r' =$ ⌊_____⌋

$f(x) = \sec x$ $\quad f'(x) =$ ⌊_____⌋

$f(\omega) = \operatorname{cosec}\omega$ $\quad f'(\omega) =$ ⌊_____⌋

$\sec^2\theta$

$\cos t$

$-\operatorname{sen} x$

$-\operatorname{cosec}^2\theta$

$\tan x \sec x$

$-\cot\omega \cdot \operatorname{cosec}\omega$

99

$f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$ $\quad f'(x) =$ ⌊_____⌋

$g(x) = \tan x - \sec x$ $\quad g'(x) =$ ⌊_____⌋

$h(u) = \operatorname{cosec} u + 5$ $\quad h'(u) =$ ⌊_____⌋

$j(\theta) = \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta$ $\quad j'(\theta) =$ ⌊_____⌋

$k(t) = \dfrac{\tan t}{\sec t}$ $\quad k'(t) =$ ⌊_____⌋

$l(\omega) = \dfrac{1 - \cos\omega}{1 - \operatorname{sen}\omega}$ $\quad l'(\omega) =$ ⌊_____⌋

$\cos x - \operatorname{sen} x$

$\sec^2 x - \tan x \sec x = \sec x(\sec x - \tan x)$

$-\cot u \operatorname{cosec} u$

$\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$ $\quad$ (o $\cos 2\theta$)

$\cos t$

$\dfrac{\operatorname{sen}\omega + \cos\omega - 1}{(1 - \operatorname{sen}\omega)^2}$

100

Atención.

$y = \text{sen}^2 x$* $\qquad \dfrac{d(y)}{dx} = \underline{\qquad\qquad}$

* Debemos tener presente que $\text{sen}^2 x = (\text{sen}\, x)^2$.

Estudiar con atención.

$2\,\text{sen}\, x \cdot \cos x \quad (\text{o sen } 2x)$

101

$y = \cos^3 x$	$\dfrac{d(y)}{dx} = \underline{\qquad\qquad}$	$3\cos^2 x(-\text{sen}\, x) = -3\cos^2 x\,\text{sen}\, x$
$s = 3\,\text{sen}^2 t$	$\dfrac{ds}{dt} = \underline{\qquad\qquad}$	$6\,\text{sen}\, t \cos t$
$r = 5\tan^3\theta + \sec^2\theta + 1$	$\dfrac{d(r)}{d\theta} = \underline{\qquad\qquad}$	$15\tan^2\theta\sec^2\theta + 2\sec\theta\tan\theta\sec\theta$ o $\sec^2\theta(15\tan^2\theta + 2\tan\theta)$
$\rho = -4\cot^5\theta$	$\dfrac{d(\rho)}{d\theta} = \underline{\qquad\qquad}$	$-20\cot^4\theta(-\text{cosec}^2\theta)$ o $20\cot^4\theta\,\text{cosec}^2\theta$
$z = \text{sen}^2\omega + 3\,\text{sen}\,\omega + \omega$	$\dfrac{d(z)}{d\omega} = \underline{\qquad\qquad}$	$2\,\text{sen}\,\omega\cos\omega + 3\cos\omega + 1$
$u = a\,\text{sen}^2 x - b\cos^2 x$	$\dfrac{d(u)}{dx} = \underline{\qquad\qquad}$	$2(a+b)\,\text{sen}\, x\cos x$ o $(a+b)\,\text{sen}\, 2x$

102

Atención.

$f(x) = \sqrt{\text{sen}\, x} \qquad f'(x) = \underline{\qquad\qquad}$

$\sqrt{\text{sen}\, x} = \text{sen}^{\frac{1}{2}} x$

$\dfrac{1}{2}\,\text{sen}^{-\frac{1}{2}} x \cdot \cos x$

o

$\dfrac{\cos x}{2\sqrt{\text{sen}\, x}}$

103

$f_1(x) = \sqrt{x - \cos x}$ $\quad f_1'(x) =$ ____

$f_2(x) = x\sqrt{1 - \operatorname{sen} x}$ $\quad f_2'(x) =$ ____

$f_3(x) = \dfrac{\tan x}{x}$ $\quad f_3'(x) =$ ____

$f_4(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ $\quad f_4'(x) =$ ____

$f_5(x) = \sqrt{x}\ \tan x$ $\quad f_5'(x) =$ ____

$\dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{2\sqrt{x - \cos x}}$

$\dfrac{-x\cos x}{2\sqrt{1 - \operatorname{sen} x}}$

$\dfrac{x\sec^2 x - \tan x}{x^2}$

$\dfrac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}$

$\sqrt{x}\ \sec^2 x + \dfrac{\tan x}{2\sqrt{x}}$

104

Atención.

$y = \operatorname{sen} 3x$ $\quad \dfrac{d(y)}{dx} =$ ____

$3\cos 3x$

105

$y = 3\operatorname{sen} 2x$ $\quad \dfrac{d(y)}{dx} =$ ____

$y = \cos 4x - \operatorname{sen}^2 2x$ $\quad \dfrac{d(y)}{dx} =$ ____

$y = 6\tan^5 (x + 1)$ $\quad \dfrac{d(y)}{dx} =$ ____

$y = -\cot^2 (x^2 - 1)$ $\quad \dfrac{d(y)}{dx} =$ ____

$y = \sec^2 \sqrt[3]{x^2 + x}$ $\quad \dfrac{d(y)}{dx} =$ ____

$y = \operatorname{cosec} \dfrac{x}{3} \cdot \tan \dfrac{x}{5}$ $\quad \dfrac{d(y)}{dx} =$ ____

$6\cos 2x$

$-6\operatorname{sen} 4x$

$30\tan^4 (x+1)\sec^2 (x+1)$

$4x\cot (x^2 - 1)\operatorname{cosec}^2 (x^2 - 1)$

$\dfrac{2(2x+1)}{3\sqrt[3]{(x^2+x)^2}} \left(\sec^2 \sqrt[3]{x^2+x} \cdot \tan \sqrt[3]{x^2+x}\right)$

$\dfrac{1}{5}\operatorname{cosec} \dfrac{x}{3}\sec^2 \dfrac{x}{5}$

$-\dfrac{1}{3}\tan \dfrac{x}{5}\cot \dfrac{x}{3}\operatorname{cosec} \dfrac{x}{3}$

7.5.3.1

Práctica adicional de
derivación trigonométrica,
si se considera necesario.

7.5.3

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *derivar* una función trigonométrica dada.

5.4

Derivada de una función inversa

106

Tenemos la función
cuya ecuación definitoria es $y = 3x + 2$
en que
la variable independiente es [ ]
y
la variable dependiente es [ ]

x

y

107

$$y = 3x + 2$$

Resolvamos esta ecuación para x:

[ ]

$$x = \frac{y - 2}{3}$$

108

$y = 3x + 2 \longrightarrow x = \dfrac{y-2}{3}$

En la ecuación resultante,
la variable independiente es [ ]
y
la variable dependiente es [ ]

y

x

109

¿Es $x = \dfrac{y-2}{3}$ la ecuación definitoria de una función?

Sí/No

Sí

(A cada valor de y corresponde un único valor de x).

110

Derivemos estas dos funciones:

$y = 3x + 2$ ↓ $\dfrac{d(y)}{dx} =$ [ ]

$x = \dfrac{y-2}{3}$ ↓ $\dfrac{d(x)}{dy} =$ [ ]

Observamos que

$\dfrac{d(x)}{dy}$ es el recíproco de $\dfrac{d(y)}{dx}$

es decir, $\dfrac{d(y)}{dx} = \dfrac{1}{\dfrac{d(x)}{dy}}$

3 $\quad \dfrac{1}{3}$

111

Consideremos, ahora, la función definida por

$y = 2x^2 - 3$

Resolviendo para x, obtenemos

$$x = \pm\sqrt{\frac{y+3}{2}}$$

112

¿Corresponde la ecuación resultante $x = \pm\sqrt{\frac{y+3}{2}}$ a una función?

Sí/No

porque

No

para cada valor de y no hay un único valor de x, sino dos.

113

Sin embargo,
podemos considerar dos funciones:

una con ecuación definitoria $x = \sqrt{\frac{y+3}{2}}$

y la otra
con ecuación definitoria $x = -\sqrt{\frac{y+3}{2}}$

114

Derivando cada una de las funciones, y expresando todos los resultados en términos de x, obtenemos:

$y = 2x^2 - 3$

$\frac{d(y)}{dx} = \square$

$x = \sqrt{\frac{y+3}{2}}$

$\frac{d(x)}{dy} = \square = \square$

resultado expresado en términos de x

$x = -\sqrt{\frac{y+3}{2}}$

$\frac{d(x)}{dy} = \square = \square$

resultado expresado en términos de x

También, en este caso, se cumple que $\frac{d(x)}{dy}$ es el recíproco de $\frac{d(y)}{dx}$

$\frac{1}{4\sqrt{\frac{y+3}{2}}} = \frac{1}{4x}$

$4x$

$\frac{1}{-4\sqrt{\frac{y+3}{2}}} = \frac{1}{4x}$

115

En general,

si $y = f(x)$ es la ecuación definitoria o regla de correspondencia de una función, y

$x = \phi(y)$ es la ecuación que resulta, al despejar x,

esta última ecuación puede ser la regla de correspondencia de otra función que llamamos "inversa" de la función original.

116

Puede demostrarse que en general:

$$\frac{d(y)}{dx} = \frac{1}{\frac{d(x)}{dy}}$$

o

$$f'(x) = \frac{1}{\phi'(y)}$$

7.5.4.1

Práctica de
derivación de funciones algebraicas inversas,
aplicando

$$f'(x) = \frac{1}{\phi'(y)}$$

si se considera necesario.

7.5.4

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *calcular* la derivada de una función inversa, a partir de la derivada de la función original, mediante la aplicación de la expresión:

$$\frac{d(y)}{dx} = \frac{1}{\frac{d(x)}{dy}}$$

5.5.

Las funciones trigonométricas inversas —repaso—

117

Hemos visto
en el bloque de trigonometría
que:

si $y = \text{sen}\, x$

$x =$ [ ]

arc sen y

118

Intercambiando las variables x e y
en la ecuación $x = \arctan y$

obtenemos: $y = \arctan x$

119

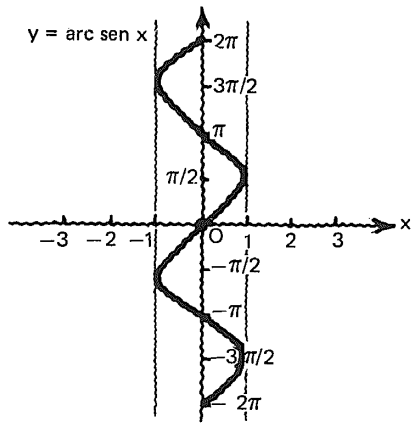
Señalar la opción correcta.

y = arcsen x

es la ecuación definitoria de una función

V/F

porque



F

a cada valor de x corresponde un número infinito de valores de arc sen x

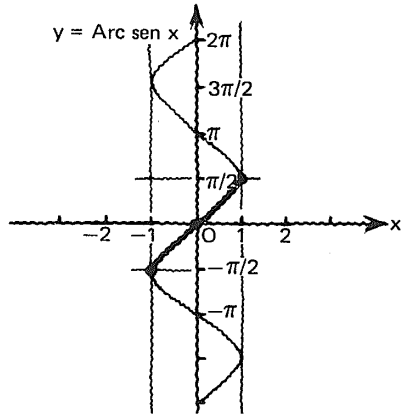
120

Para que se defina una función debemos restringir el rango, por ejemplo a:

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$$

Hablamos de la "función arcoseno restringida" y la denotamos con

y = Arc sen x



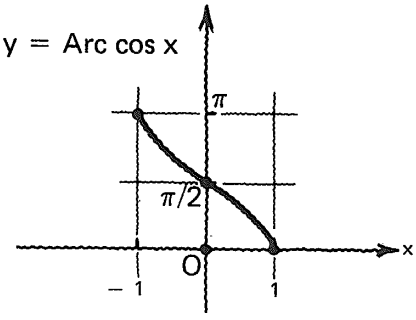
121

La **función Arcocoseno**

Ecuación definitoria

Dominio

Rango



y = Arc cos x

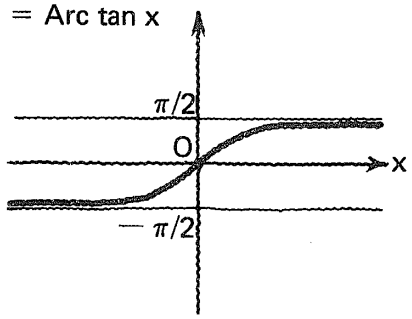
$\{x/x \in \mathbb{R} \wedge -1 \leqslant x \leqslant 1\}$
o $[-1, 1]$

$\{y/y \in \mathbb{R} \wedge 0 \leqslant y \leqslant \pi\}$
o $[0, \pi]$

122

La **función Arcotangente**

$y = \text{Arc tan } x$



Ecuación definitoria

Dominio

Rango

$y = \text{Arc tan } x$

$\mathcal{R}$ o $(-\infty, +\infty)$

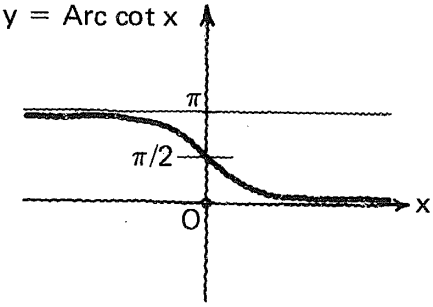
$\left\{y/y \in \mathcal{R} \wedge -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right\}$

o $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

123

La **función Arcocotangente**

$y = \text{Arc cot } x$



Ecuación definitoria

Dominio

Rango

$y = \text{Arc cot } x$

$\mathcal{R}$ o $(-\infty, +\infty)$

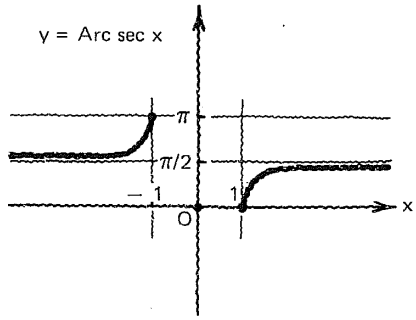
$\{y/y \in \mathcal{R} \wedge 0 < y < \pi\}$

o $(0, \pi)$

124

La **función Arco secante**

$y = \text{Arc sec } x$



Ecuación definitoria

Dominio

Rango

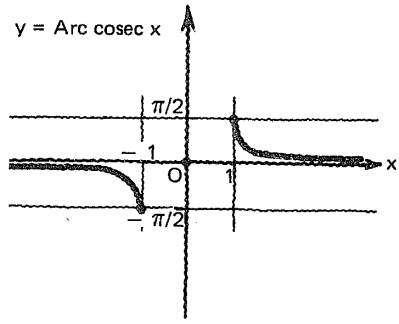
$y = \text{Arc sec } x$

$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

$[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$

125

La función Arcocosecante



Ecuación definitoria

Dominio

Rango

y = Arc cosec x

$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

$[-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2]$

7.5.5

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *dar* el dominio, el rango y la ecuación definitoria de cada una de las 6 funciones trigonométricas inversas.

5.6

Derivadas de las funciones trigonométricas inversas

126

1. Derivada de la función Arcoseno

Sea $y = \text{Arc sen } x$ $\left[\begin{array}{l} -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \pi/2 \end{array}\right]$

de donde $x =$ [ ]

Sen y

127

$y = \text{Arc sen } x$

$x = \text{Sen } y$

$\frac{d(x)}{dy} =$ [ ]

Cos y

128

$y = \text{Arc sen } x$

$x = \text{Sen } y$

$\dfrac{d(x)}{dy} = \text{Cos } y$

$\dfrac{d(y)}{dx} = [\qquad\qquad] = [\qquad\qquad]$

$\dfrac{1}{\dfrac{d(x)}{dy}} = \dfrac{1}{\text{Cos } y}$

129

Hemos encontrado que:

$$\frac{d(y)}{dx} = \frac{1}{\text{Cos } y}$$

Ahora bien, a partir de $x = \text{Sen } y$ encontremos una expresión para Cos y.

$\text{Cos } y = [\qquad\qquad]$

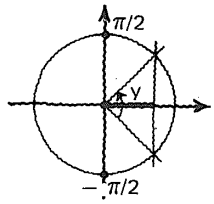
Respuesta en el cuadro siguiente

$\text{Sen}^2 y + \text{Cos}^2 y = 1$

$\text{Cos}^2 y = 1 - \text{Sen}^2 y$

$\text{Cos } y = \pm\sqrt{1 - \text{Sen}^2 y}$

para $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ $\text{Cos } y \geqslant 0$(*)



por lo tanto escribimos $\text{Cos } y = \sqrt{1 - \text{Sen}^2 y}$ y como $\text{Sen } y = x$

$$\text{Cos } y = \sqrt{1 - x^2}$$

(*) Para $y = -\dfrac{\pi}{2}$ o $y = \dfrac{\pi}{2}$ Cos y = 0 y no se define la expresión $\dfrac{1}{\text{Cos } y}$.

130

$$\frac{d(y)}{dx} = \frac{1}{\text{Cos } y}$$

Y como $\text{Cos } y = \sqrt{1 - x^2}$

entonces: $\frac{d(y)}{dx} =$ [ ]

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

131

$$\frac{d(\text{Arc sen } x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \left[\begin{matrix} -1 < x < 1 \\ -\frac{\pi}{2} < \text{Arc sen } x < \frac{\pi}{2} \end{matrix}\right]$$

Y, de acuerdo con la regla de la cadena:

si $y = \text{Arc sen } u$

y $u = g(x)$

$\frac{d(\text{Arc sen } u)}{dx} =$ [ ]

$$\frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot \frac{d(u)}{dx} = \frac{\frac{d(u)}{dx}}{\sqrt{1 - u^2}}$$

132

2. Derivada de la función Arcocoseno

Sea $Y = \text{Arc cos } x \quad \left[\begin{matrix} 1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant \pi \end{matrix}\right]$

$x =$ [ ]

$\frac{d(x)}{dy} =$ [ ]

$\frac{d(y)}{dx} =$ [ ] $=$ [ ]

Cos y

$-$ Sen y

$$\frac{1}{\frac{d(x)}{dy}} = \frac{1}{-\text{Sen } y} = -\frac{1}{\text{Sen } y}$$

133

$x = \text{Cos}\, y$

$$\frac{d(y)}{dx} = -\frac{1}{\text{Sen}\, y}$$

Determinamos una expresión para **Sen y** en términos de x a partir de **Cos y = x.**

$\text{Sen}\, y =$ [ ]

$\text{Sen}\, y = \pm\sqrt{1 - \text{Cos}^2 y}$

para $0 \leqslant y \leqslant \pi$ $\text{Sen}\, y \geqslant 0$ (*) por lo tanto escribimos:

$\text{Sen}\, y = \sqrt{1 - \text{Cos}^2 y}$

como $\text{Cos}\, y = x$

$\text{Sen}\, y = \sqrt{1 - x^2}$

(*) Para $y = 0$ o $y = \pi$ $\text{Sen}\, y = 0$ y no se define la expresión $-1/\text{Sen}\, y$.

134

$$\frac{d(y)}{dx} = -\frac{1}{\text{Sen}\, y}$$

Puesto que $\text{Sen}\, y = \sqrt{1 - x^2}$

$$\frac{d(y)}{dx} = \text{[ ]}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

135

$$\frac{d(\text{Arc cos}\, x)}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad -1 < x < 1 \qquad 0 < \text{Arc cos}\, x < \pi$$

Y siendo **u** una función de x; tenemos, de acuerdo con la regla de la cadena:

$$\frac{d(\text{Arc cos}\, u)}{dx} = \text{[ ]}$$

$$-\frac{\dfrac{d(u)}{dx}}{\sqrt{1 - u^2}}$$

136

3. Derivada de la función Arcotangente.

Sea $y = \text{Arc}\tan x \quad \left[\begin{array}{r} x \in \mathbb{R} \\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \end{array}\right]$

de donde $x =$ [ ]

$\text{Tan}\, y$

137

$x = \text{Tan}\, y$

$\frac{d(x)}{dy} =$ [ ]

$\text{Sec}^2 y$

138

$\frac{d(x)}{dy} = \text{Sec}^2 y$

$\frac{d(y)}{dx} =$ [ ] $=$ [ ]

$\frac{1}{\frac{d(x)}{dy}} = \frac{1}{\text{Sec}^2 y}$

139

$$y = \text{Arctan}\, x$$
$$x = \text{Tan}\, y$$
$$\frac{d(y)}{dx} = \frac{1}{\text{Sec}^2 y}$$

Buscando una expresión para **$\text{Sec}^2 y$** en términos de x, a partir de $\text{Tan}\, y = x$

$\text{Sec}^2 y =$ [ ]

$\text{Sec}^2 y = 1 + \text{Tan}^2 y$

como $\text{Tan}\, y = x$

$\text{Sec}^2 y = 1 + x^2$

$1 + x^2$

140

$$\frac{d(y)}{dx} = \frac{1}{\text{Sec}^2 y}$$

$$\text{Sec}^2 y = 1 + x^2$$

$$\frac{d(y)}{dx} = \text{[ ]}$$

$$\frac{1}{1 + x^2}$$

141

$$\frac{d(\text{Arctan}\, x)}{dx} = \frac{1}{1 + x^2} \qquad x \in \mathbb{R} \qquad -\frac{\pi}{2} < \text{Arctan}\, x < \frac{\pi}{2}$$

Y siendo **u** una función de **x**:

$$\frac{d(\text{Arctan}\, u)}{dx} = \text{[ ]}$$

$$\frac{\frac{d(u)}{dx}}{1 + u^2}$$

142

4. Derivada de la función Arcocotangente.

$$\frac{d\,(\text{Arc cot } x)}{dx} = \boxed{}$$

$$\frac{d\,(\text{Arc cot } u)}{dx} = \boxed{}$$

$$y = \text{Arc cot } x \quad \begin{bmatrix} x \in \mathbb{R} \\ 0 < y < \pi \end{bmatrix}$$
$$x = \text{Cot } y$$

$$\frac{d(x)}{dy} = -\text{Cosec}^2 y$$

$$\frac{d(y)}{dx} = -\frac{1}{\text{Cosec}^2 y}$$

$$\text{Cosec}^2 y = 1 + \text{Cot}^2 y = 1 + x^2$$

$$\frac{d(y)}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$-\frac{1}{1+x^2} \quad \begin{matrix} x \in \mathbb{R} \\ 0 < \text{Arccot } x < \pi \end{matrix}$$

$$-\frac{\frac{d(u)}{dx}}{1+u^2}$$

143

5. Derivada de la función Arcosecante.

$$\frac{d\,(\text{Arc sec } x)}{dx} = \boxed{}$$

$$\frac{d\,(\text{Arc sec } u)}{dx} = \boxed{}$$

Respuesta en los cuadros siguientes

Estudiar con mucha atención.

$$y = \text{Arc sec } x \qquad \begin{bmatrix} x \leqslant -1 \vee x \geqslant 1 \\ y \in [0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi] \end{bmatrix}$$
$$x = \text{Sec } y$$

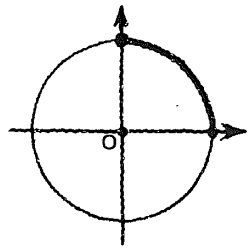
$$\frac{d(x)}{dy} = \text{any Sec } y \quad \frac{d(y)}{dx} = \frac{1}{\text{Tan } y \text{ Sec } y}$$

$$\text{Sec } y = x$$

$$\text{Tan } y = \pm\sqrt{\text{Sec}^2 y - 1}$$

para $y \in [0, \pi/2)$ tan $y \geqslant 0$;
en este intervalo Sec $y = x \geqslant 1$ $\Big\}$(*)

$$\text{y Tan y Sec y} = x\sqrt{x^2 - 1}$$



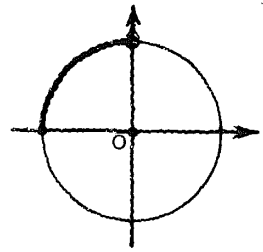
* Para y = 0, Tan y = 0 y $\frac{1}{\text{Tan y Sec y}}$ no se define.

Para $y \in (\pi/2, \pi]$

$\left.\begin{array}{l}\text{Tan } y \leqslant 0 \\ \text{en este intervalo} \\ \text{Sec } y = x \leqslant -1\end{array}\right\}$ (*)

y Tan y Sec y $= -x\sqrt{x^2-1}$.
por lo tanto escribimos:

$$\frac{d(\text{Arc sec } x)}{dx} = \begin{cases} \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}} & \text{si } x > 1 \\ -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}} & \text{si } x < -1 \end{cases}$$



(*) Para $y = \pi$, Tan $y = 0$ y $\dfrac{1}{\text{Tan } y \text{ Sec } y}$ no se define.

$$\frac{d(\text{Arc sec } u)}{dx} = \begin{cases} \dfrac{d(u)/dx}{u\sqrt{u^2-1}} & \text{si } u > 1 \\ -\dfrac{d(u)/dx}{u\sqrt{u^2-1}} & \text{si } u < -1 \end{cases}$$

144

$$\frac{d(\text{Arc sec } x)}{dx} = \begin{cases} \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}} & \text{si } x > 1 \\ & 0 < \text{Arc sec } x < \pi/2 \\ -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}} & \text{si } x < -1 \\ & \dfrac{\pi}{2} < \text{Arc sec } x < \pi \end{cases}$$

$$\frac{d(\text{Arc sec } u)}{dx} = \begin{cases} \dfrac{d(u)/dx}{u\sqrt{u^2-1}} & \text{si } u > 1 \\ & 0 < \text{Arc sec } u < \pi/2 \\ -\dfrac{d(u)/dx}{u\sqrt{u^2-1}} & \text{si } u < -1 \\ & \dfrac{\pi}{2} < \text{Arc sec } u < \pi \end{cases}$$

145

6. Derivada de la función Arcocosecante.

$$\frac{d(\text{Arc cosec } x)}{dx} = \square$$

$$\frac{d(\text{Arc cosec } u)}{dx} = \square$$

Respuesta en los cuadros siguientes

Estudiar con mucha atención.

$$y = \text{Arc cosec } x \quad \left[\begin{matrix} x \leqslant -1 \wedge x \geqslant 1 \\ y \in [-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2] \end{matrix}\right]$$

$$x = \text{Cosec } y$$

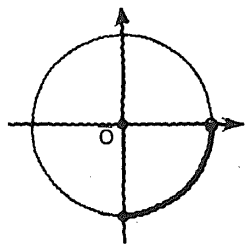
$$\frac{d(x)}{dy} = -\text{Cot } y \text{ Cosec } y$$

$$\frac{d(y)}{dx} = -\frac{1}{\text{Cot } y \text{ Cosec } y}$$

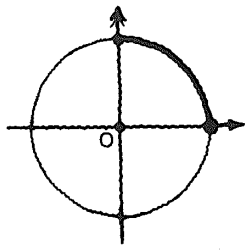
$$\text{Cosec } y = x$$

$$\text{Cot } y = \pm\sqrt{\text{Cosec}^2 x - 1}$$

Para $y \in [-\pi/2, 0)$
$\text{Cot } y \leqslant 0$;
en tal intervalo
$\text{Cosec } y = x \leqslant -1$
y escribimos
$\text{Cot } y \text{ Cosec } y = -x\sqrt{x^2 - 1}$ } (*)



(*) Para $y = -\frac{\pi}{2}$, $\text{Cot } y = 0$ y $-\frac{1}{\text{Cot } y \text{ Cosec } y}$ no se define.



Para $y \in (0, \pi/2]$
Cot $y \geqslant 0$,
en tal intervalo
Cosec $y = x \geqslant 1$
y escribimos
Cot y Cosec $y = x\sqrt{x^2 - 1}$ } (*)

(*) Para $y = \frac{\pi}{2}$, Cot $y = 0$ y $-\frac{1}{\text{Cot } y \text{ Cosec } y}$ no se define.

$$\frac{d(\text{Arc cosec } x}{dx} = \begin{cases} -\dfrac{1}{-x\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}} & \text{si } x < -1 \\ -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\frac{d(\text{Arc cosec } u)}{dx} = \begin{cases} \dfrac{d\,(u)/dx}{u\sqrt{u^2-1}} & \text{si } u < -1 \\ -\dfrac{d\,(u)/dx}{u\sqrt{u^2-1}} & \text{si } u > 1 \end{cases}$$

146

$$\frac{d(\text{Arc cosec } x)}{dx} = \begin{cases} -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}} & \text{si } x > 1 \\ & -\pi/2 < \text{Arc cosec } x < 0 \\ \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}} & \text{si } x < -1 \\ & 0 < \text{Arc cosec } x < \pi/2 \end{cases}$$

$$\frac{d\,(\text{Arc cosec } u)}{dx} = \begin{cases} -\dfrac{d\,(u)/dx}{u\sqrt{u^2-1}} & \text{si } u > 1 \\ & -\pi/2 < \text{Arc cosec } u < 0 \\ \dfrac{d\,(u)/dx}{u\sqrt{u^2-1}} & \text{si } u < -1 \\ & 0 < \text{Arc cosec } u < \pi/2 \end{cases}$$

147

Resumen 2. Derivadas de las funciones trigonométricas inversas.

1. $$\frac{d(\text{Arcsen}u)}{dx} = \frac{d(u)/dx}{\sqrt{1-u^2}} \qquad -1 < u < 1$$

2. $$\frac{d(\text{Arccos}u)}{dx} = -\frac{d(u)/dx}{\sqrt{1-u^2}} \qquad -1 < u < 1$$

3. $$\frac{d(\text{Arctan}u)}{dx} = \frac{d(u)/dx}{1+u^2} \qquad u \in \mathbb{R}$$

4. $$\frac{d(\text{Arccot}u)}{dx} = -\frac{d(u)/dx}{1+u^2} \qquad u \in \mathbb{R}$$

5. $$\frac{d(\text{Arcsec}u)}{dx} = \begin{cases} \dfrac{d(u)/dx}{u\sqrt{u^2-1}} & \text{si } u > 1 \\ -\dfrac{d(u)/dx}{u\sqrt{u^2-1}} & \text{si } u < -1 \end{cases}$$

6. $$\frac{d(\text{Arccosec}u)}{dx} = \begin{cases} -\dfrac{d(u)/dx}{u\sqrt{u^2-1}} & \text{si } u > 1 \\ \dfrac{d(u)/dx}{u\sqrt{u^2-1}} & \text{si } u < -1 \end{cases}$$

7.5.6

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *obtener* una expresión para la derivada de cada una de las seis funciones trigonométricas inversas.

Resumen 2. Derivadas de las funciones trigonométricas inversas.

1. $$\frac{d(\text{Arcsen}u)}{dx} = \frac{d(u)/dx}{\sqrt{1-u^2}} \qquad -1 < u < 1$$

2. $$\frac{d(\text{Arccos}u)}{dx} = -\frac{d(u)/dx}{\sqrt{1-u^2}} \qquad -1 < u < 1$$

3. $$\frac{d(\text{Arctan}u)}{dx} = \frac{d(u)/dx}{1+u^2} \qquad u \in \mathbb{R}$$

4. $$\frac{d(\text{Arccot}u)}{dx} = -\frac{d(u)/dx}{1+u^2} \qquad u \in \mathbb{R}$$

5. $$\frac{d(\text{Arcsec}u)}{dx} = \begin{cases} \dfrac{d(u)/dx}{u\sqrt{u^2-1}} & \text{si } u > 1 \\ -\dfrac{d(u)/dx}{u\sqrt{u^2-1}} & \text{si } u < -1 \end{cases}$$

6. $$\frac{d(\text{Arccosec}u)}{dx} = \begin{cases} -\dfrac{d(u)/dx}{u\sqrt{u^2-1}} & \text{si } u > 1 \\ \dfrac{d(u)/dx}{u\sqrt{u^2-1}} & \text{si } u < -1 \end{cases}$$

5.7

Derivación trigonométrica inversa

149

$f(x) = \text{Arctan}\, x$ $\qquad f'(x) =$ ⌊_____⌋

$g(u) = \text{Arcsec}\, u$ $\qquad g'(u) =$ ⌊_____⌋

$h(s) = \dfrac{\text{Arcsen}\, s}{2}$ $\qquad h'(s) =$ ⌊_____⌋

$j(\omega) = \text{Arc cot}\, \omega - \omega$ $\qquad j'(\omega) =$ ⌊_____⌋

$k(z) = z^2\, \text{Arc cos}\, z$ $\qquad k'(z) =$ ⌊_____⌋

$l(y) = \text{sen}\, y\, \text{Arccosec}\, y$ $\qquad l'(y) =$ ⌊_____⌋

Respuesta en el cuadro siguiente

- $\dfrac{1}{1 + x^2}$
- $\begin{cases} 5/u\sqrt{u^2 - 1} & \text{si } u > 1 \\ -5/u\sqrt{u^2 - 1} & \text{si } u < -1 \end{cases}$
- $\dfrac{1}{2\sqrt{1 - s^2}}$
- $-\dfrac{1}{1 + \omega^2} - 1$
- $-\dfrac{z^2}{\sqrt{1 - z^2}} + 2z\, \text{Arc cos}\, z$
- $\begin{cases} -\dfrac{\text{sen}\, y}{y\sqrt{y^2 - 1}} + \cos y\, \text{Arccosec}\, y & \text{si } y > 1 \\ \dfrac{\text{sen}\, y}{y\sqrt{y^2 - 1}} + \cos y\, \text{Arccosec}\, y & \text{si } y < -1 \end{cases}$

150

$y = \text{Arcsen}\ \frac{x}{2}$ $\quad \frac{d(y)}{dx} =$ ⌊ ⌋

$y = 5\,\text{Arccos}\,3x$ $\quad \frac{d(y)}{dx} =$ ⌊ ⌋

$y = \frac{\text{Arctan}\,(3x - 1)}{2}$ $\quad \frac{d(y)}{dx} =$ ⌊ ⌋

$y = a\,\text{Arccot}\,(3x^2 + 5)$ $\quad \frac{d(y)}{dx} =$ ⌊ ⌋

$\frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$

$-\frac{15}{\sqrt{1 - 9x^2}}$

$\frac{3}{2[1 + (3x - 1)^2]}$

$-\frac{6\,ax}{1 + (3x^2 + 5)^2}$

151

$y = x\,\text{Arccos}\,\frac{x}{2}$ $\quad y' =$ ⌊ ⌋

$y = \text{Arccot}\,\frac{1}{x^2 + 1}$ $\quad y' =$ ⌊ ⌋

$y = \text{Arccos}\,\frac{x}{a}$ $\quad y' =$ ⌊ ⌋

$y = x^3\,\text{Arctan}\,3x$ $\quad y' =$ ⌊ ⌋

$\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} + \text{Arccos}\,\frac{x}{2}$

$\frac{2x}{(x^2 + 1)^2 + 1}$

$-\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

$\frac{3x^3}{1 + 9x^2} + 3x^2\,\text{Arctan}\,3x$

152

Atención.

$y = \text{Arcsec}\,\frac{1}{x}$ Se requiere determinar $\frac{d(y)}{dx}$.

Consideremos primero $\frac{1}{x} > 1$.

Resolviendo esta desigualdad para x resulta:

Intervalo de definición ⌊ ⌋

$\frac{1}{x} > 1$

si $x > 0$: $1 > x$; o bien ; $x < 1$; $S_1 = (0, 1)$

si $x < 0$: $1 < x$; o bien ; $x > 1$; $S_2 = (\ )$

$S = S_1 \cup S_2 = (0, 1)$ o sea $0 < x < 1$

153

$y = \text{Arcsec}\ \frac{1}{x}$ $\qquad \frac{d(y)}{dx} = ?$

Para $\frac{1}{x} > 1$ o $0 < x < 1$

$\frac{d(y)}{dx} =$ [ ]

[ ]

Expresión simplificada: [ ]

Respuesta en el cuadro siguiente

Estudiar con suma atención.

$$\frac{\frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{dx}}{\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}}$$

$$\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}}$$

$$\frac{-1}{x\sqrt{\frac{1-x^2}{x^2}}} = -\frac{1}{x\sqrt{\frac{1-x^2}{x^2}}}$$

$$-\frac{\sqrt{x^2}}{x\sqrt{1-x^2}}$$

$$-\frac{x}{x\sqrt{1-x^2}}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Puesto que, en el intervalo considerado, $\frac{1}{x} > 1$, o equivalentemente $0 < x < 1$, (es decir que x es positiva y $\sqrt{x^2}$ debe ser positiva, escribimos $\sqrt{x^2} = x$.

154

Escribimos, entonces:

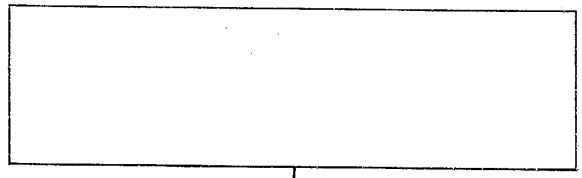
$$\frac{d\left(\text{Arcsec}\ \frac{1}{x}\right)}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{si } 0 < x < 1$$

155

$$y = \text{Arcsec}\ \frac{1}{x}$$

Ahora consideremos $\frac{1}{x} < -1$

Resolvamos esta desigualdad para x:



Intervalo de definición

$\frac{1}{x} < -1$

si $x > 0$ | Si $x < 0$

$1 < -x$ | $1 > -x$

$-x > 1$ | $-x < 1$

$x < -1$ | $x > -1$

$S_1 = (\ )$ | $S_2 = (-1, 0)$

$S = S_1 \cup S_2 = (-1, 0)$

o sea

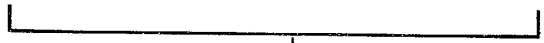
$-1 < x < 0$

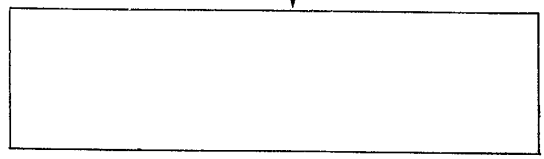
156

$$y = \text{Arcsec}\ \frac{1}{x}$$

para $\frac{1}{x} < -1$ o $-1 < x < 0$

$$\frac{d(y)}{dx} =$$





Expresión simplificada:

Respuesta en el cuadro siguiente

Estudiar con suma atención.

$$-\frac{\frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{dx}}{\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}}=-\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}}$$

$$\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}}=\frac{1}{x\sqrt{\frac{1-x^2}{x^2}}}$$

$$\frac{\sqrt{x^2}}{x\sqrt{1-x^2}}=\frac{-x}{x\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Puesto que en el intervalo considerado $\frac{1}{x}<-1$ o equivalentemente $-1<x<0$, o sea que x es negativa y $\sqrt{x^2}$ debe ser positiva, escribimos: $\sqrt{x^2}=-x$.

157

Escribimos:

$$\frac{d\left(\text{Arcsec}\ \frac{1}{x}\right)}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{si } -1<x<0$$

158

En resumen:

$$\frac{d\left(\text{Arcsec } \frac{1}{x}\right)}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

para $(0 < x < 1) \vee (-1 < x < 0)$

159

Vamos a ver esto
en forma gráfica.

Para ello, necesitamos trazar la curva
correspondiente a la función

$$y = \text{Arcsec } \frac{1}{x}$$

cuyo **dominio** es el intervalo [ ]
y
cuyo **rango** es el intervalo [ ]

$\frac{1}{x} \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

$\text{Arcsec } \frac{1}{x} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

160

$$y = \text{Arc sec } \frac{1}{x}$$

En forma de desigualdad, podemos expresar el
dominio así:

[ ]

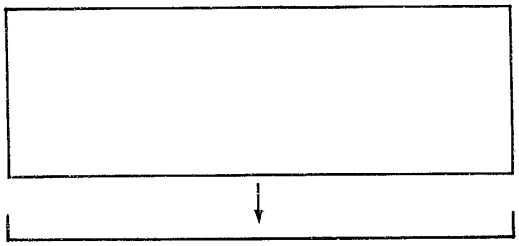
$\left(\frac{1}{x} \leqslant -1\right) \vee \left(\frac{1}{x} \geqslant 1\right)$

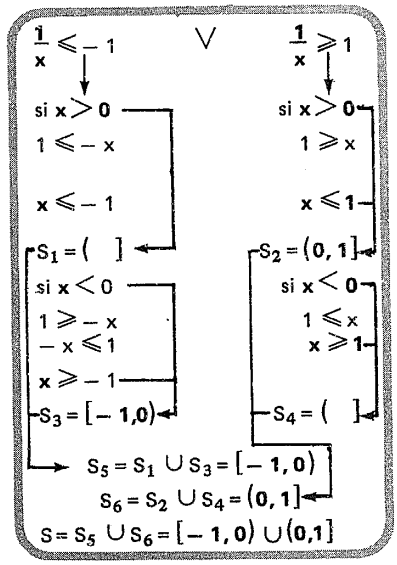
161

$$y = \text{Arcsec}\ \frac{1}{x}$$

$$\text{Dominio}\left(\frac{1}{x} \leqslant -1\right) \vee \left(\frac{1}{x} \geqslant 1\right)$$

Resolviendo para x, obtenemos:





162

$$y = \text{Arcsec}\ \frac{1}{x}$$

$$\text{Dominio} \begin{cases} x \in [-1, 0) \cup (0, 1] \\ \text{o bien} \\ (-1 \leqslant x < 0) \vee (0 < x \leqslant 1) \end{cases}$$

163

Completar.

x	Arcsec 1/x
− 1	
− 1/2	
(0)	
1/2	
1	

Observemos que, en general,

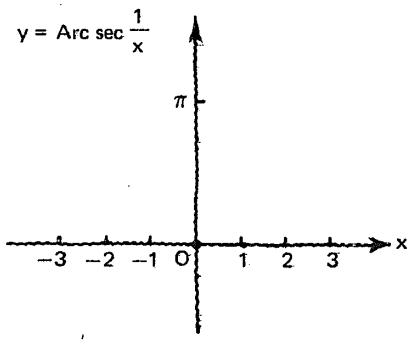
$\text{Arcsec}\ \frac{1}{x} = \text{Arccos}\, x$

x	Arcsec 1/x
− 1	π
− 1/2	$2\pi/3$
(0)	$(\pi/2)$
1/2	$\pi/3$
1	0

164

Gráfica cartesiana de

$\text{Arcsec}\ \dfrac{1}{x}$



Respuesta en el cuadro siguiente

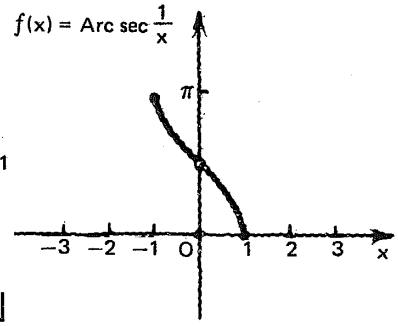
$f(x) = \text{Arcsec}\ \dfrac{1}{x}$

Hemos encontrado:

$f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ si $|x| < 1$

Por ejemplo:

$f'\left(\dfrac{1}{2}\right) =$ ⌊ ⌋



$-\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \doteq -1.15$

165

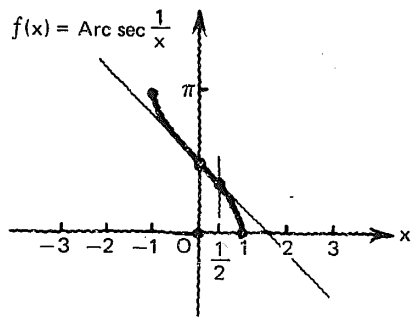
$f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \doteq -1.15$

Recordemos que:

$f'\left(\dfrac{1}{2}\right)$ representa

la pendiente de la curva f, en el punto de abscisa $\dfrac{1}{2}$.

El signo − indica que la recta tangente en ese punto es "decreciente".



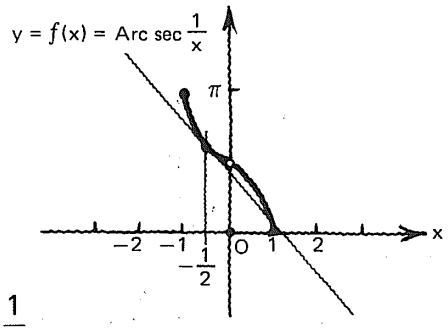
166

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{si } |x| < 1$$

$$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = \boxed{\qquad\qquad}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \doteq -1.15$$

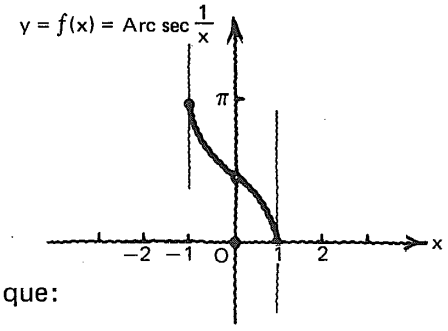
167



Para el punto de abscisa $-\frac{1}{2}$

la pendiente de f
es también negativa,
y numéricamente igual a $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

168



$$f(x) = \text{Arcsec}\,\frac{1}{x}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

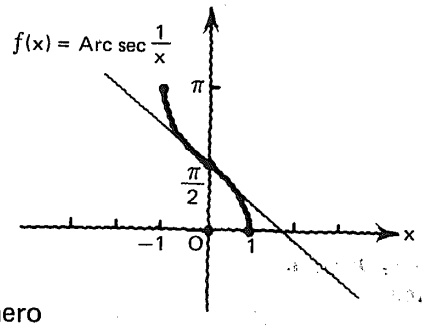
Podemos observar también, que:

para $x = 1$ o $x = -1$
la pendiente no está definida,
lo que significa que, en los
puntos $(-1, \pi)$ y $(1, 0)$
la recta tangente es vertical.

169

$$f(x) = \text{Arcsec}\ \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$



Además, si asignamos a la función f, el valor $\pi/2$ para $x = 0$,
se vuelve continua en ese número
$f'(0)$ existe y es igual a [ ]

que es la pendiente de la curva en el punto de abscisa cero.

Finalmente, escribimos: $f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ si $|x| < 1$

— 1

7.5.7.1

Práctica adicional de derivación trigonométrica inversa, si se considera necesario.

7.5.7

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *determinar* la derivada de una función trigonométrica inversa dada.

5.8

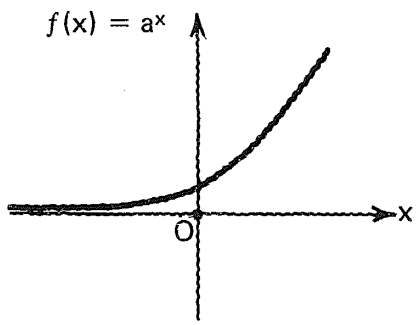
Funciones exponencial y logarítmica

170

Recordemos que
la ecuación definitoria o regla de correspondencia
de una
función exponencial
es
$y = a^x$
en que
a es una constante positiva y diferente de cero.

171

Hemos visto
en una etapa anterior
de nuestro estudio, que
si $a > 1$
la gráfica
de la función
exponencial toma
la forma indicada.



Podemos observar que
el **dominio** es igual a $\mathbb{R}$
y el **rango** es igual a $\mathbb{R}^+$

172

Observaciones:

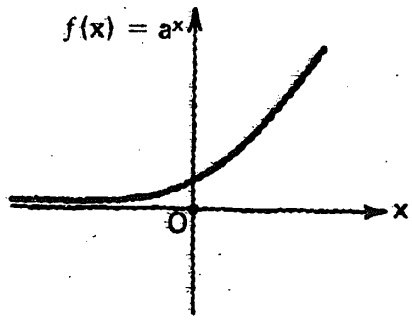
Si $x \to +\infty$

$f(x) \to$ [ ]

si $x \to -\infty$

$f(x) \to$ [ ]

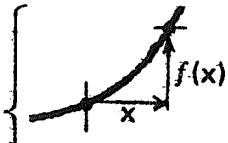
la función es creciente/decreciente para todo valor de x.



+ ∞

0

creciente { si x aumenta, f(x) aumenta

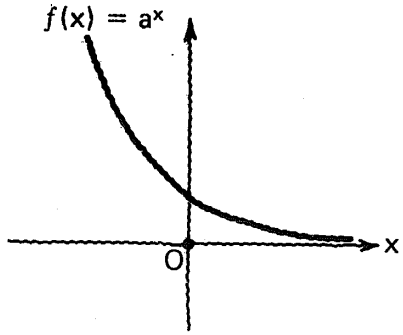


173

Si $0 < a < 1$
la gráfica correspondiente a
$y = a^x$
toma este aspecto.

Dominio = [ ]

Rango = [ ]



$\mathcal{R}$

$\mathcal{R}^+$

174

Observaciones:

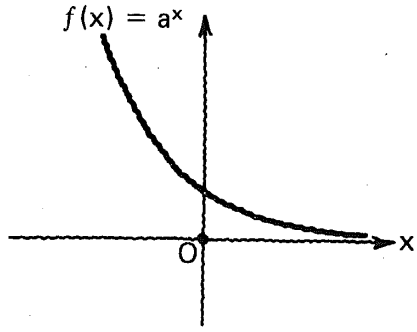
Si $x \to +\infty$

$f(x) \to$ [ ]

Si $x \to -\infty$

$f(x) \to$ [ ]

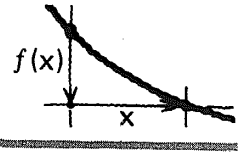
la función es **creciente/decreciente** para todos los valores de x.



0

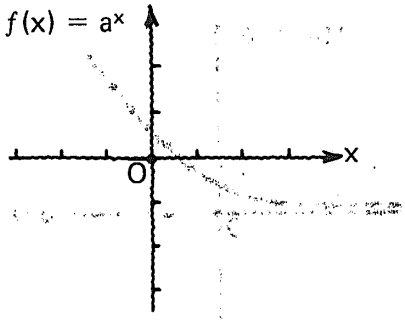
+ ∞

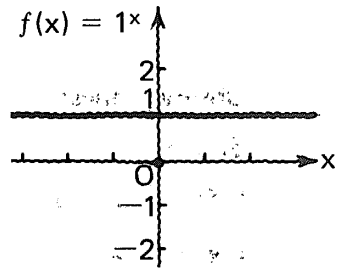
• decreciente { si x aumenta, f(x) disminuye



175

Si en $f(x) = a^x$
$a = 1$
no se define una función exponencial sino una **función** [ ]
cuya gráfica tiene el aspecto indicado.



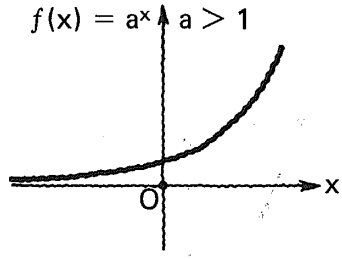


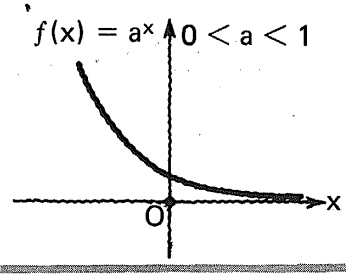
constante

Para cualquier valor de x
$f(x) = 1^x = 1$

176

En forma intuitiva, podemos afirmar que la función exponencial definida por
$f(x) = a^x$ con $a \in \mathbb{R}^+ \wedge a \neq 1$
es/no es continua
para todo valor de $x \in \mathbb{R}$,





es

177

Para toda $x = x_1$ se cumplen estas tres condiciones

1. [ ]
2. [ ]
3. [ ]

a^{x_1} existe

$\lim_{x \to x_1} a^x$ existe

$\lim_{x \to x_1} a^x = a^{x_1}$

178

Si de la expresión $y = a^x$
despejamos x,
obtenemos, por definición $x =$ [ ]
que se convierte en [ ]
al intercambiar las variables x e y.

$\log_a y$
$y = \log_a x$

179

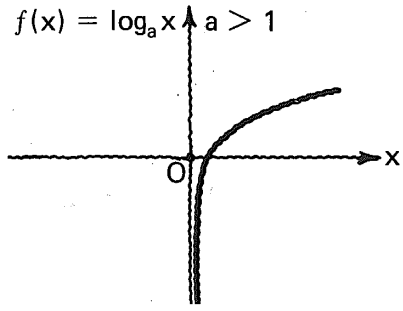
$$y = f(x) = \log_a x$$

es la ecuación definitoria
o regla de correspondencia
de la función [ ]

logarítmica

180

Si $a > 1$
la gráfica cartesiana de
$f(x) = \log_a x$
tiene el aspecto mostrado.



Podemos apreciar que
su **dominio** es [ ]
y
su **rango** es [ ]

$\mathcal{R}^+$

$\mathcal{R}$

181

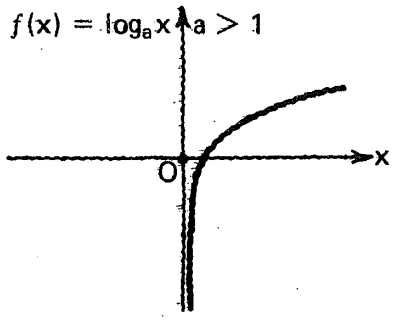
Si $x \to +\infty$

$f(x) = \log_a x \to$ [ ]

Si $x \to 0^+$

$f(x) = \log_a x \to$ [ ]

la función logarítmica ($a > 1$) es **creciente/decreciente** para toda x.



$+\infty$

$-\infty$

creciente

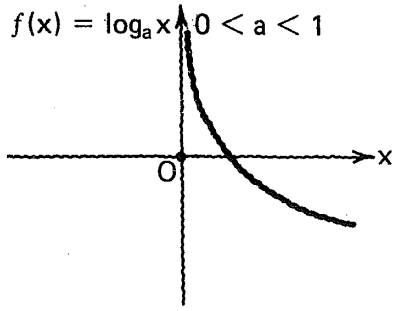
182

Si $0 < a < 1$

la gráfica de la función logarítmica tiene este aspecto →

dominio = [ ]

rango = [ ]



$\mathcal{R}^+$

$\mathcal{R}$

183

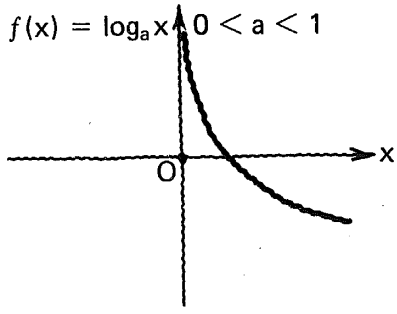
Si $x \to +\infty$

$f(x) = \log_a x \to$ [ ]

Si $x \to 0^+$

$f(x) = \log_a x \to$ [ ]

La función es **creciente/decreciente** para toda x.



$-\infty$

$+\infty$

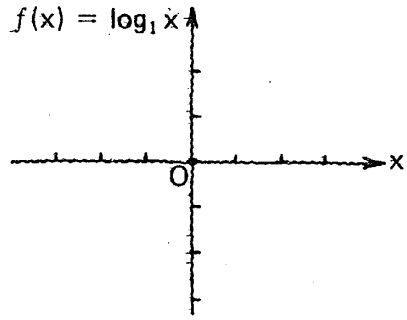
decreciente

184

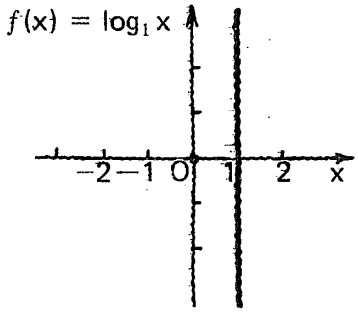
Si $a = 1$

$f(x) = \log_a x$

no define
una función logarítmica,
ni siquiera define
una función.



Trazar la gráfica correspondiente.

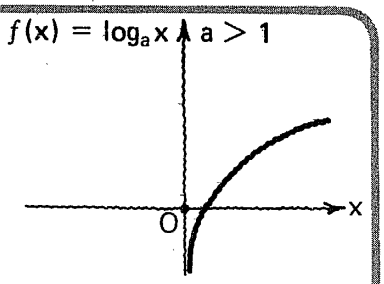


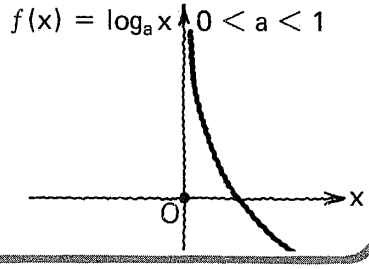
185

Intuitivamente, señalar
la opción correcta.

La función logarítmica
definida por

$f(x) = \log_a x \quad a \in \mathbb{R}^+ \wedge a \neq 1$





es **continua** para

- toda $x \in \mathbb{R}$
- toda $x \in \mathbb{R} \wedge x \neq 0$
- toda $x \in \mathbb{R}^+$

para toda $x \in \mathbb{R}^+$

186

Para toda $x = x_1 \in \mathbb{R}^+$:

1. ⌊ ⌋
2. ⌊ ⌋
3. ⌊ ⌋

$\log_a x_1$ existe

$\lim_{x \to x_1} \log_a x$ existe

$\lim_{x \to x_1} \log_a x = \log_a x_1$

187

Si a = 10
definimos la
función logarítmica de base 10
función logarítmica decimal
o
función logarítmica común
cuya regla de correspondencia escribimos así:

$f(x) = \log x$

188

Hemos estudiado, también, que
si a = e (en que e ≐ 2.71828...)
definimos la
función logarítmica de base e
función logarítmica natural
o **función logarítmica neperiana**
con ecuación definitoria

$f(x) = \ln x$

189

Digamos algo más
acerca de este número **e.**

190

Consideremos la expresión $f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$
e
intentemos calcular su **límite cuando $x \to 0$.**

Observamos que:
la función no está definida para $x = 0$,
puesto que el exponente $1/x$ toma la forma
indefinida $\frac{1}{0}$.

191

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = ?$$

Echaremos mano de nuestro ya familiar procedimiento de aproximarnos a x, por la derecha y por la izquierda, observando, en cada caso, el comportamiento de la función.

192

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = ?$$

$x \to 0^-$

x	-1	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	-0.00001
$(1 + x)^{\frac{1}{x}}$						

$(1 + x)^{\frac{1}{x}}$ *

$x \to 0^+$

0.00001	0.0001	0.001	0.01	0.1	1	x
						$(1 + x)^{\frac{1}{x}}$

$(1 + x)^{\frac{1}{x}}$ *

* Intentar describir el comportamiento de la función

Respuesta en el cuadro siguiente

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = ?$$

$x \to 0^-$

x	-1	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	-0.00001
$(1 + x)^{\frac{1}{x}}$	no def.	2.8679723	2.7319993	2.7196423	2.7184173	2.7182954

$x \to 0^+$

0.00001	0.0001	0.001	0.01	0.1	1	x
2.718268	2.718146	2.716924	2.704814	2.593742	2	$(1 + x)^{\frac{1}{x}}$

193

$(1 + x)^{\frac{1}{x}}$ parece tender a un cierto límite en las proximidades de **2.71828.**

Se ha demostrado que tal límite existe y es un número irracional.

Se le denota universalmente con la letra **e.**

194

La relación entre
el logaritmo natural
y
el logaritmo común
de un número
está dada por la expresión $\ln x = \dfrac{\log x}{\log e}$

Y puesto que $\log e \doteq 0.4343$

$$\ln x \doteq \frac{\log x}{0.4343} \doteq 2.3026 \log x$$

195

Conviene recordar que:

$\log_a a =$ [ ]

1
puesto que $a^1 = a$

196

También
debemos tener presentes
las siguientes **propiedades**
de los logaritmos:

1. $\log_a nm = \log_a n + \log_a m$
2. $\log_a n/m = \log_a n - \log_a m$
3. $\log_a n^m = m \log_a n$
4. $\log_a \sqrt[m]{n} = \frac{\log_a n}{m}$

7.5.8.

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *recordar* algunos hechos fundamentales en relación con las funciones exponencial y logarítmica;
- *explicar* el significado matemático del número e, base de los logaritmos naturales.

5.9

Derivadas de las funciones exponenciales y logarítmicas

197

1. Derivada de la función logarítmica natural.

Sea $f(x) = \ln x$

1. $f(x + \Delta x) =$ [ ]

2. $f(x + \Delta x) - f(x) =$ [ ]

3. $\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$ [ ]

$\ln(x + \Delta x)$

$\ln(x + \Delta x) - \ln x$

$\dfrac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x}$

198

3. $\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \dfrac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x}$

Expresión transformada aplicando la propiedad 2 de los logaritmos:

↓

[ ]

$$\frac{\ln \dfrac{x + \Delta x}{x}}{\Delta x}$$

o bien

$$\frac{1}{\Delta x} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

199

3. $$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

Permitámonos
la siguiente transformación
de la expresión
del segundo miembro
multiplicando y dividiendo por x.

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\Delta x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

200

3. $$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\Delta x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

Apliquemos, ahora,
la propiedad 3

$$\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

201

3. $$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

4. $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\ln\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]$$

Y dada la continuidad de la función logarítmica natural:

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\ln\left[\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]$$

202

$$4.\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\cdot \ln\left[\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]$$

Cuando $\Delta x \to 0$

$$\frac{\Delta x}{x}\to \square$$

Entonces, podemos escribir:

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\cdot \ln\left[\lim_{\square}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]$$

0

$\frac{\Delta x}{x} \to 0$

203

Observar con mucha atención.

$$4.\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\cdot \ln\left[\lim_{\frac{\Delta x}{x}\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]$$

Ahora bien:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}=\square$$

$$\lim_{\frac{\Delta x}{x}\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}=\square$$

- $\frac{1}{x}$
- e

$\lim_{\frac{\Delta x}{x}\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$

es de la forma:

$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

con $x=\frac{\Delta x}{x}$

204

$$4.\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\cdot \ln\left[\lim_{\frac{\Delta x}{x}\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]$$

Sustituyendo los límites encontrados ↓

$$\square$$

$\frac{1}{x}\cdot \ln e$

205

4. $\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \dfrac{1}{x} \cdot \ln e$

Como $\ln e =$ [ ]

$\dfrac{d(\ln x)}{dx} =$ [ ]

1

$\dfrac{1}{x}$

206

Hemos obtenido:

$$\frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x}$$

Y por la regla de la cadena, siendo u una función de x:

$$\frac{d(\ln u)}{dx} = \text{[ ]}$$

$\dfrac{1}{u} \cdot \dfrac{d(u)}{dx}$ o $\dfrac{\dfrac{d(u)}{dx}}{u}$

207

2. Derivada de la función logarítmica decimal.

Sea $f(x) =$ [ ]

$\log x$

208

$f(x) = \log x$

Como sabemos que: $\ln x = \dfrac{\log x}{\log e}$

podemos expresar $f(x)$ en términos de $\ln x$, así:

$f(x) =$ [ ]

$\log e \cdot \ln x$

($\log e$ es constante)

209

$f(x) = \log e \cdot \ln x$

$f'(x) =$ [ ]

$\log e \cdot \dfrac{d(\ln x)}{dx} = \log e \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{\log e}{x}$

210

$f(x) = \log e \cdot \ln x$

$\dfrac{d(\log x)}{dx} = \dfrac{\log e}{x}$

Si **u** es una función de x
tenemos,
de acuerdo con la regla de la cadena:

$\dfrac{d(\log u)}{dx} =$ [ ]

$\dfrac{d(\log u)}{dx} = \dfrac{\log e}{u} \cdot \dfrac{d(u)}{dx}$

211

3. Derivada de la función exponencial natural.

$y = e^x$

Resolviendo para x

$\lfloor \_\_\_\_\_ \rfloor$

$x = \ln y$

(puesto que $\ln y = \log_e y$)

212

$y = e^x$

$x = \ln y$

$\frac{d(x)}{dy} = \lfloor \_\_\_\_ \rfloor$

$\frac{1}{y}$

213

$y = e^x$

$x = \ln y$

$\frac{d(x)}{dy} = \frac{1}{y}$

$\frac{d(y)}{dx} = \lfloor \_\_\_\_\_ \rfloor$

$\frac{1}{\frac{d(x)}{dy}} = y = e^x$

214

$y = e^x$

$x = \ln y$

$\frac{d(x)}{dy} = \frac{1}{y}$

$\frac{d(y)}{dx} = \frac{d(e^x)}{dx} = e^x$

Observemos este caso curioso en que la derivada de una función es igual a la función misma.

215

$$\frac{d(e^x)}{dx} = e^x$$

Si **u** es una función de **x**:

$$\frac{d(e^u)}{dx} = \text{\_\_\_\_\_}$$

$e^u \cdot \frac{d(u)}{dx}$

216

4. Derivada de la función exponencial definida por a^u.

Sea $y = a^x$

Resolviendo para x

_____

$x = \log_a y$

217

$y = a^x$

Tomando logaritmos naturales de los dos miembros:

$\ln y = \ln a^x$

218

$y = a^x$

$\ln y = \ln a^x =$ [ ]

Aplicando la propiedad 3 de los logaritmos.

$x \ln a$

219

$y = a^x$

$\ln y = \ln a^x = x \ln a$

Resolviendo para x:

$$x = \frac{\ln y}{\ln a} = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln y$$

220

$y = a^x$

$\ln y = \ln a^x = x \ln a$

$x = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln y$

$\frac{d(x)}{dy} =$ [ ]

$\frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{\ln a \cdot a^x}$

221

$y = a^x$

$\ln y = \ln a^x = x \ln a$

$x = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln y$

$\frac{d(x)}{dy} = \frac{1}{\ln a \cdot a^x}$

$\frac{d(y)}{dx} =$ [ ]

$\ln a \cdot a^x$

222

$$\frac{d(a^x)}{dx} = \ln a \cdot a^x$$

Y siendo **u** una función de x:

$\frac{d(a^u)}{dx} =$ [ ]

$\ln a \cdot a^u \cdot \frac{d(u)}{dx}$

223

$$\frac{d(a^u)}{dx} = \ln a \cdot a^u \cdot \frac{d(u)}{dx}$$

Observemos que:

si **a** = **e**, la expresión se convierte en:

[ ]

$$\frac{d(e^u)}{dx} = \ln e \cdot e^u \cdot \frac{d(u)}{dx}$$

$$= e^u \cdot \frac{d(u)}{dx}$$

puesto que ln e = 1

224

5. Derivada de la función exponencial general.

Sea $y = u^v$ en que **u** y v son funciones de **x**.

Tomamos logaritmos naturales de ambos miembros:

[ ] = [ ]

y aplicamos la propiedad 3, al segundo miembro.

$\ln y = \ln u^v = v \ln u$

225

$y = u^v$

$\ln y = v \ln u$

Expresión exponencial equivalente:

[ ]

$y = e^{v \ln u}$

226

$y = u^{v}$

$\ln y = v \ln u$

$y = e^{v \ln u}$

$\dfrac{d(y)}{dx} =$ [ ]

$e^{v \ln u} \dfrac{d(v \ln u)}{dx}$

227

$y = u^{v}$

$\ln y = v \ln u$

$y = e^{v \ln u}$

$\dfrac{d(y)}{dx} = e^{v \ln u} \cdot \dfrac{d(v \ln u)}{dx}$

Puesto que $v \ln u$ es un producto de dos funciones

$\dfrac{d(v \ln u)}{dx} =$ [ ]

y

$\dfrac{d(y)}{dx} =$ [ ]

$v \dfrac{d(\ln u)}{dx} + \ln u \cdot \dfrac{d(v)}{dx}$

$= \dfrac{v}{u} \cdot \dfrac{d(u)}{dx} + \ln u \cdot \dfrac{d(v)}{dx}$

$e^{v \ln u} \left[\dfrac{v}{u} \cdot \dfrac{d(u)}{dx} + \ln u \cdot \dfrac{d(v)}{dx} \right]$

228

$y = u^{v}$

$\ln y = v \ln u$

$y = e^{v \ln u}$

$\dfrac{d(y)}{dx} = e^{v \ln u} \left[\dfrac{v}{u} \cdot \dfrac{d(u)}{dx} + \ln u \cdot \dfrac{d(v)}{dx} \right]$ Pero $e^{v \ln u} = y = u^{v}$

entonces:

$\dfrac{d(y)}{dx} = u^{v} \left[\dfrac{v}{u} \cdot \dfrac{d(u)}{dx} + \ln u \cdot \dfrac{d(v)}{dx} \right]$

y efectuando el producto indicado en el segundo miembro:

$\dfrac{d(y)}{dx} =$ [ ]

$v \cdot \dfrac{u^{v}}{u} \cdot \dfrac{d(u)}{dx} + u^{v} \cdot \ln u \cdot \dfrac{d(v)}{dx}$

o bien, puesto que $\dfrac{u^{v}}{u} = u^{v-1}$

$v \cdot u^{v-1} \cdot \dfrac{d(u)}{dx} + u^{v} \cdot \ln u \cdot \dfrac{d(v)}{dx}$

229

Si observamos con atención la expresión obtenida

$$\frac{d(u^{\nu})}{dx} = \nu \cdot u^{\nu-1} \cdot \frac{d(u)}{dx} + \ln u \cdot u^{\nu} \cdot \frac{d(\nu)}{dx}$$

vemos que, el segundo miembro está formado de dos sumandos:

el primero es la derivada de u^{ν} con respecto a x, considerando a ν como constante
y
el segundo es la derivada de u^{ν} con respecto a x, considerando a **u** como constante.

230

Ahora bien:

si en $\frac{d(u^{\nu})}{dx} = \nu \cdot u^{\nu-1} \cdot \frac{d(u)}{dx} + \ln u \cdot u^{\nu} \cdot \frac{d(\nu)}{dx}$

hacemos $\nu = n$ en que **n** es una constante cualquiera, se obtiene:

siendo **n** una constante

$$\ln u \cdot u^{n} \cdot \frac{d(n)}{dx} = 0$$

puesto que $\frac{d(n)}{dx} = 0$

$$\frac{d(u^{n})}{dx} = n u^{n-1} \cdot \frac{d(u)}{dx}$$

231

$$\frac{d(u^{\nu})}{dx} = \nu u^{\nu-1} \cdot \frac{d(u)}{dx} + \ln u \cdot u^{\nu} \cdot \frac{d(\nu)}{dx}$$

la expresión $\frac{d(u^{n})}{dx} = n u^{n-1} \cdot \frac{d(u)}{dx}$

no nos es desconocida, pues representa la derivada de una **función potencia** cuya validez para cualquier valor de $n \in \mathcal{R}$ ha quedado demostrada.

232

Resumen 3. Derivadas de funciones exponenciales y logarítmicas.

1. $\dfrac{d(\ln u)}{dx} = \dfrac{\dfrac{d(u)}{dx}}{u}$

2. $\dfrac{d(\log u)}{dx} = \dfrac{\log e}{u} \cdot \dfrac{d(u)}{dx}$

3. $\dfrac{d(e^u)}{dx} = e^u \cdot \dfrac{d(u)}{dx}$

4. $\dfrac{d(a^u)}{dx} = \ln a \cdot a^u \cdot \dfrac{d(u)}{dx}$

5. $\dfrac{d(u^v)}{dx} = v \cdot u^{v-1} \cdot \dfrac{d(u)}{dx} + \ln u \cdot u^v \cdot \dfrac{d(v)}{dx}$

7.5.9

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *obtener* las siguientes expresiones para las derivadas de las funciones logarítmicas y exponenciales:

1. $\dfrac{d(\ln u)}{dx} = \dfrac{\dfrac{d(u)}{dx}}{u}$

2. $\dfrac{d(\log u)}{dx} = \dfrac{\log e}{u} \cdot \dfrac{d(u)}{dx}$

3. $\dfrac{d(e^u)}{dx} = e^u \cdot \dfrac{d(u)}{dx}$

4. $\dfrac{d(a^u)}{dx} = \ln a \cdot a^u \cdot \dfrac{d(u)}{dx}$

5. $\dfrac{d(u^v)}{dx} = v \cdot u^{v-1} \cdot \dfrac{d(u)}{dx} + \ln u \cdot u^v \cdot \dfrac{d(v)}{dx}$

5.10

Derivación exponencial y logarítmica

233

Resumen 3. Derivadas de funciones exponenciales y logarítmicas.

1. $$\frac{d(\ln u)}{dx} = \frac{\frac{d(u)}{dx}}{u}$$

2. $$\frac{d(\log u)}{dx} = \frac{\log e}{u} \cdot \frac{d(u)}{dx}$$

3. $$\frac{d(e^u)}{dx} = e^u \cdot \frac{d(u)}{dx}$$

4. $$\frac{d(a^u)}{dx} = \ln a \cdot a^u \cdot \frac{d(u)}{dx}$$

5. $$\frac{d(u^v)}{dx} = v \cdot u^{v-1} \cdot \frac{d(u)}{dx} + \ln u \cdot u^v \cdot \frac{d(v)}{dx}$$

234

Derivar las funciones siguientes:

$y = \ln x$ $\qquad \frac{d(y)}{dx} =$ ⌊_____⌋

$y = \ln(3x + 2)$ $\qquad \frac{d(y)}{dx} =$ ⌊_____⌋

$y = \ln(x^2 - 1)$ $\qquad \frac{d(y)}{dx} =$ ⌊_____⌋

$y = \ln \frac{x^2}{1 + x^2}$ $\qquad \frac{d(y)}{dx} =$ ⌊_____⌋

$\frac{1}{x}$

$\frac{3}{3x + 2}$

$\frac{2x}{x^2 - 1}$

$\frac{2}{x(1 + x^2)}$

235

$y = \ln \sqrt{4 - x^2}$ $\qquad \frac{d(u)}{dx} = ?$

Conviene transformar la expresión del segundo miembro mediante la aplicación de la propiedad 4 de los logaritmos:

$y =$ ⌊_____⌋

$\frac{1}{2} \ln (4 - x^2)$

236

$y = \ln \sqrt{4 - x^2} = \frac{1}{2} \ln (4 - x^2)$

$\frac{d(y)}{dx} =$ ⌊_____⌋

$\frac{1}{2} \cdot \frac{-2x}{4 - x^2}$

$-\frac{x}{4 - x^2}$

237

$$y = \ln\sqrt{\frac{2+3x}{2-3x}}$$

Por la propiedad 4: $y =$ [ ]

Por la propiedad 2; $y =$ [ ]

$\frac{1}{2}\ln\frac{2+3x}{2-3x}$

$\frac{1}{2}[\ln(2+3x) - \ln(2-3x)]$

238

$$y = \ln\sqrt{\frac{2+3x}{2-3x}} = \frac{1}{2}\left[\ln(2+3x) - \ln(2-3x)\right]$$

$\frac{d(y)}{dx} =$ [ ]

Expresión simplificada [ ]

$\frac{1}{2}\left[\frac{3}{2+3x} - \frac{-3}{2-3x}\right]$

$\frac{1}{2}\left[\frac{3(2-3x)+3(2+3x)}{(2+3x)(2-3x)}\right]$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{6-9x+6+9x}{4-9x^2}$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{12}{4-9x^2}$

$\frac{6}{4-9x^2}$

239

$\rho = \theta \ln\theta$ $\quad \frac{d(\rho)}{d\theta} =$ [ ]

$s = \frac{\ln t^2}{t^2}$ $\quad \frac{d(s)}{dt} =$ [ ]

$u = (3+x)\ln\sqrt{x}$ $\quad \frac{d(u)}{dx} =$ [ ]

$1 + \ln\theta$

$\frac{2(1-\ln t^2)}{t^3}$

$\frac{3+x}{2x} + \frac{\ln x}{2}$

240

Derivar las funciones siguientes:

$y = \log x$ $\qquad \frac{d(y)}{dx} = \square$

$f(x) = \log(3x^2 - 1)$ $\qquad f'(x) = \square$

$g(\theta) = \log \frac{1}{\theta}$ $\qquad g'(\theta) = \square$

$h(t) = \log\sqrt{t^2 - 1}$ $\qquad h(t) = \square$

$\frac{\log e}{x}$

$\frac{6 \log e \cdot x}{3x^2 - 1}$

$-\frac{\log e}{\theta}$

$\frac{\log e \cdot t}{t^2 - 1}$

7.5.10.1

Práctica adicional de derivación logarítmica, si se considera necesario.

241

Derivar las funciones siguientes:

$y = e^x$ $\qquad \frac{d(y)}{dx} = \square$

$s = e^t$ $\qquad \frac{d(s)}{dt} = \square$

$\rho = e^\theta$ $\qquad \frac{d(\rho)}{d\theta} = \square$

e^x

e^t

e^θ

242

$f(x) = e^{-x}$ $\quad f'(x) =$ ____

$g(x) = e^{2x}$ $\quad g'(x) =$ ____

$h(x) = e^{3x-1}$ $\quad h'(x) =$ ____

$j(x) = e^{x^2}$ $\quad j'(x) =$ ____

$k(x) = e^{\sqrt{x}}$ $\quad k'(x) =$ ____

$-e^{-x}$

$2e^{2x}$

$3e^{3x-1}$

$2xe^{x^2}$

$\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

243

$f_1(\theta) = e^{\operatorname{sen}\theta}$ $\quad f_1'(\theta) =$ ____

$f_2(\theta) = e^{\operatorname{Arc}\tan\theta}$ $\quad f_2'(\theta) =$ ____

$f_3(\theta) = e^{\ln 3\theta}$ $\quad f_3'(\theta) =$ ____

$f_4(\theta) = e^{\log\sqrt{\theta}}$ $\quad f_4'(\theta) =$ ____

$f_5(\theta) = e^{e^{\theta}}$ $\quad f_5'(\theta) =$ ____

$e^{\operatorname{sen}\theta} \cdot \cos\theta$

$\dfrac{e^{\operatorname{Arc}\tan\theta}}{1+\theta^2}$

$\dfrac{e^{\ln 3\theta}}{\theta}$

$\dfrac{\log e \cdot e^{\log\sqrt{\theta}}}{2\theta}$

$e^{\theta} \cdot e^{e^{\theta}} = e^{(\theta + e^{\theta})}$

244

$y = 10^{\operatorname{sen} x}$ $\quad \dfrac{d(y)}{dx} =$ ____

$w = 2^{\ln(x^2+1)}$ $\quad \dfrac{d(w)}{dx} =$ ____

$z = \pi^{3x+2}$ $\quad \dfrac{d(z)}{dx} =$ ____

$\rho = k^{e^x}$ $\quad \dfrac{d(\rho)}{dx} =$ ____

$\ln 10 \cdot 10^{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x$

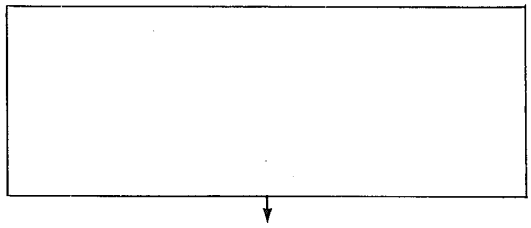
$\dfrac{2x \ln 2 \cdot 2^{\ln(x^2+1)}}{x^2+1}$

$3 \ln\pi \cdot \pi^{3x+2}$

$\ln k \cdot k^{e^x} \cdot e^x$

245

$f(x) = x^x$ $\qquad f'(x) = ?$



$f'(x) =$

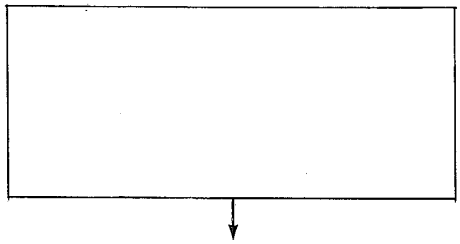
$x \cdot x^{x-1} + \ln x \cdot x^x$

$x^x + x^x \ln x$

$x^x(1 + \ln x)$

246

$y = (\operatorname{sen} x)^{\cos x}$



$\dfrac{d(y)}{dx} =$

Respuesta
en el
cuadro siguiente

$\cos x\,(\operatorname{sen} x)^{\cos x - 1} \cdot \cos x + \ln \operatorname{sen} x \cdot (\operatorname{sen} x)^{\cos x} \cdot (-\operatorname{sen} x)$

$\cos^2 x\,(\operatorname{sen} x)^{\cos x - 1} - \operatorname{sen} x \cdot \ln \operatorname{sen} x \cdot (\operatorname{sen} x)^{\cos x}$

$\cos^2 x\,(\operatorname{sen} x)^{\cos x - 1} - \ln \operatorname{sen} x \cdot (\operatorname{sen} x)^{\cos x + 1}$

$(\operatorname{sen} x)^{\cos x - 1}\,[\cos^2 x - \ln \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen}^2 x]$

7.5.10.2

Práctica adicional de
derivación exponencial,
si se considera necesario.

7.5.10.3

Práctica de derivación
logarítmica y exponencial
combinadas,
si se considera necesario.

7.5.10.4

Práctica miscelánea de
derivación trascendente,
si se considera necesario.

7.5.10.5

Práctica miscelánea de
derivación algebraica y trascendente
combinadas,
si se considera necesario.

7.5.10

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *derivar* una función logarítmica
  o exponencial dada.

Esta obra se terminó de imprimir
el día 2 de enero de 1985,
en los talleres de Litográfica Ingramex, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 1, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se encuadernó en Ediciones Pegaso, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 4, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se tiraron
3 000 ejemplares, más sobrantes de reposición

CO REG KC 100